

Baccalauréat ES Amérique du Nord

27 mai 2014 – Corrigé

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse b.

La courbe représentative de f est située au dessus de l'axe des abscisses ; la fonction f est donc positive sur $[-5; 5]$.

2. Réponse c.

La courbe \mathcal{C} admet en 0 une tangente horizontale donc $f'(0) = 0$.

3. Réponse c.

Le nombre dérivé de f en 4 est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 4 ; on a donc $f'(4) = -\frac{1}{e^2}$.

4. Réponse c.

Le nombre A est l'aire sous la courbe entre -2 et 2 ; cette aire est comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

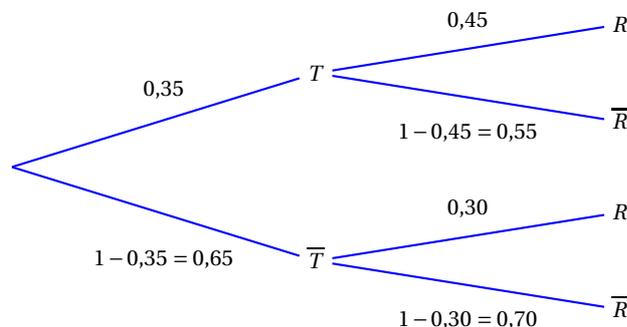
EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre pondéré décrivant la situation est :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = P(R \cap T) + P(R \cap \bar{T}) = 0,35 \times 0,45 + 0,65 \times 0,3 = 0,3525$$

La probabilité qu'un appartement loué soit rentable est bien égale à 0,3525.

3. La probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2 sachant qu'il est rentable est $P_R(T)$.

$$P_R(T) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)} = \frac{0,35 \times 0,45}{0,3525} \approx 0,4468$$

Partie B

La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 35$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. À la calculatrice, on trouve : $P(25 \leq X \leq 35) \approx 0,4772$.

2. La probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables est $P(X \geq 45) \approx 0,0228$.

Partie C

- La fréquence d'appartements rentables dans l'échantillon est $\frac{120}{280} \approx 0,4286$.
- On suppose que l'affirmation du responsable de l'agence est vraie. On calcule l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour un échantillon de 280 dossiers.

Les conditions pour calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique sont remplies car

$$n = 280 \geq 30, np = 168 \geq 5 \text{ et } n(1-p) = 112 \geq 5$$

Les bornes de l'intervalle sont :

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{280}} \approx 0,54261$$

$$p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,6 + 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{280}} \approx 0,65738$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique est donc $[0,5426; 0,6574]$.

On constate que la fréquence observée 0,4286 n'appartient pas à cet intervalle.

On rejette donc l'affirmation du responsable de cette agence.

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

- La valeur demandée correspond à l'image de 8 ; elle peut être estimée à 97 secondes.
La durée de chargement pour 8 000 personnes connectées est donc d'environ 97 secondes.
- Un antécédent de 15 par f est à peu près égal à 2.
 - Lorsque la durée de téléchargement est de 15 secondes, il y a environ 2 000 personnes connectées.

Partie B

La fonction g est définie sur $[0,5; +\infty[$ par $g(x) = 10x - 8\ln(x)$.

- Sur l'intervalle $[0,5; +\infty[$, $g'(x) = 10 - \frac{8}{x}$.
 - On étudie le signe de g' sur $[0,5; +\infty[$: $10 - \frac{8}{x} > 0 \Leftrightarrow 10 > \frac{8}{x} \Leftrightarrow 10x > 8 \Leftrightarrow x > 0,8$
On en déduit le tableau de signe de g' et les variations de g :

x	0,5	0,8	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g	$5 + 8\ln 2$	$8 - 8\ln 0,8$	

- La fonction G est définie sur $[0,5; +\infty[$ par $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ln(x)$.

On calcule la dérivée de G sur $[0,5; +\infty[$:

$$G'(x) = 10x + 8 - 8\ln(x) - 8x \frac{1}{x} = 10x + 8 - 8\ln(x) - 8 = 10x - 8\ln(x) = g(x)$$

G est donc une primitive de g sur $[0,5; +\infty[$.

- On pose $I = \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{a. } I &= \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) \, dx = \frac{1}{2} (G(4) - G(2)) = \frac{1}{2} ((80 + 32 - 32 \ln 4) - (20 + 16 - 16 \ln 2)) \\ &= \frac{1}{2} (112 - 64 \ln 2 - 36 + 16 \ln 2) = 38 - 24 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{b. } I = \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) \, dx = \frac{1}{4-2} \int_2^4 g(x) \, dx$$

I est donc la valeur moyenne de la fonction g entre 2 et 4. De plus $I \approx 21,36$.

On peut donc dire que lorsque le nombre de connectés est compris entre 2 000 et 4 000, la durée du téléchargement est en moyenne proche de 21 secondes.

Partie C

On a vu dans la partie A qu'avec le modèle exponentiel, la durée de chargement pour 8 000 connectés serait d'environ 97 secondes.

$g(8) = 80 - 8 \ln 8 \approx 63$. Avec le modèle logarithmique, on aurait environ 63 secondes de temps de téléchargement.

On constate que le modèle exponentiel est plus proche de la réalité pour cette valeur.

EXERCICE 4

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de la spécialité et candidats de la série L

1.
 - a. $0,95 \times 50\,000 = 47\,500$
En 2014, il restera 95 % des arbres de 2013, soit 47 500 arbres.
On replante 3 000 arbres. Il y a donc $47\,500 + 3\,000 = 50\,500$ arbres en 2014.
 - b. En 2013, il y a 50 000 arbres ; on a donc bien $u_0 = 50\,000$.
Chaque année, on ne conserve que 95 % des arbres de l'année précédente.
L'année 2013 + $(n + 1)$, le nombre d'arbres conservé est donc $0,95u_n$.
En ajoutant les 3 000 nouveaux arbres, on a donc, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 3\,000$.
2. On considère la suite v définie pour tout n de \mathbb{N} par $v_n = 60\,000 - u_n$; donc $u_n = 60\,000 - v_n$.
 - a. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60\,000 - u_{n+1} = 60\,000 - (0,95u_n + 3\,000) = 57\,000 - 0,95u_n \\ &= 57\,000 - 0,95 \times (60\,000 - v_n) = 57\,000 - 57\,000 + 0,95v_n \\ &= 0,95v_n \end{aligned}$$
 $v_0 = 60\,000 - u_0 = 60\,000 - 50\,000 = 10\,000$
 (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = 10\,000$.
 - b. Pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n = 10\,000 \times 0,95^n$.
 - c. Pour tout entier naturel n , $u_n = 60\,000 - v_n = 60\,000 - 10\,000 \times 0,95^n = 10\,000(6 - 0,95^n)$
 - d. Comme $-1 < 0,95 < 1$, on peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$.
On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - 0,95^n) = 6$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 60\,000$.
 - e. Au fil des années, le nombre d'arbres dans cette forêt s'approchera de 60 000.
3.
 - a. On résout l'inéquation $u_n \geq 57\,000$:

$$\begin{aligned} u_n \geq 57\,000 &\iff 10\,000(6 - 0,95^n) \geq 57\,000 \\ &\iff 6 - 0,95^n \geq 5,7 \\ &\iff 0,3 \geq 0,95^n \\ &\iff \ln 0,3 \geq n \ln 0,95 && \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff \frac{\ln 0,3}{\ln 0,95} \leq n && (\ln 0,95 < 0) \end{aligned}$$

$$\frac{\ln 0,3}{\ln 0,95} \approx 23,47$$
 donc les solutions de l'inéquation sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 24.
 - b. $2013 + 24 = 2037$ donc à partir de 2037, le nombre d'arbres sera supérieur à 57 000.

4. a. Le premier et le deuxième algorithme ne conviennent pas car ils affichent un seul nombre alors qu'on attend plusieurs valeurs de la suite ; l'instruction « Afficher » doit obligatoirement se trouver dans une boucle.
- Le troisième algorithme convient. Il commence par demander la valeur de n à l'utilisateur, puis il affiche u_0 puis les $n - 1$ valeurs suivantes de la suite. L'instruction « Afficher » qui se trouve en dehors de la boucle permet d'afficher la dernière valeur calculée u_n .
- b. On retrouve avec l'algorithme 1 le résultat de la question 3 ; c'est à l'issue de la 24^e année que le nombre d'arbres dans la forêt aura atteint 57 000.

EXERCICE 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

1. Dans le graphe \mathcal{G} donné dans le texte :
- les sommets A et C ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe \mathcal{G} n'est pas complet ;
 - il existe un chemin reliant deux sommets quelconques, donc le graphe \mathcal{G} est connexe.
2. a. Déterminons les degrés de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	3	4	3	4	2	4	4

Il y a exactement deux sommets de degrés impairs, B et D, donc le graphe \mathcal{G} admet un chemin eulérien, c'est-à-dire un chemin qui part d'un des sommets de degré impair, qui passe une fois et une seule par chaque arête, et qui arrive à l'autre sommet de degré impair.

- b. Exemple de trajet empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute :

B – A – D – E – B – C – E – G – C – H – F – G – H – D

3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe \mathcal{G} (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
- a. La matrice d'adjacence M associée au graphe est une matrice carrée d'ordre 8, ne contenant que des 0 et des 1. Si une arête relie le sommet numéro i ($1 \leq i \leq 8$) au sommet numéro j ($1 \leq j \leq 8$), on mettra un 1 à la ligne i et la colonne j de la matrice ; sinon on mettra un 0.

$$\text{Donc la matrice d'adjacence est } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice M^3 donne le nombre de chemins de longueur 3 entre tous les sommets. Le sommet E est le numéro 5, le sommet H le numéro 8 ; le nombre de chemins de longueur 3 allant de E à H est le nombre situé dans la matrice à la ligne 5 et la colonne 8.

Il y a donc 4 chemins de longueur 3 allant de E vers H.

Ces chemins sont : E – B – C – H ; E – C – G – H ; E – G – F – H et E – G – C – H.

Partie B

Le graphe \mathcal{G} est complété par des distances kilométriques entre les sommets.

On détermine, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F :

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	400 (A)	∞	600 (A)	∞	∞	∞	∞	B (A)
		1000 (B)	600 (A)	800 (B)	∞	∞	∞	D (A)
		1000 (B)		800 (B) 900 (D)	∞	∞	1 500 (D)	E (B)
		1 000 (B) 1 150 (E)			∞	1 400 (E)	1 500 (D)	C (B)
					∞	1 400 (E) 1 550 (C)	1 450 (C)	G (E)
					1 600 (G)		1 750 (G)	F (G)

Le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F est : $A \xrightarrow{400} B \xrightarrow{400} E \xrightarrow{600} G \xrightarrow{200} F$

Ce trajet a une longueur totale de 1 600 kilomètres.