Dérivation - Correction

Exercice 1

1. La fonction $f(x) = 2x - 3$ est-elle dérivable en 0 ?

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x - 3 + 3}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

Donc, la fonction $f(x) = 2x - 3$ est dérivable en 0 et vaut 2.

2. La fonction $g(x) = -2x^2 + x - 2$ est-elle dérivable en -1 ?
3. La fonction $h(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ est-elle dérivable en 3 ?

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^6 + 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - x - 2$

$$f'(x) = 6x^5 + 8x^3 + 13x^2 - 4x - 1$$

2. $g(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x-2}$

Posons : $u = -x^2 + 3x - 1$ et $v = x - 2$.
On a donc : $u' = -2x + 3$ et $v' = 1$.

$$g'(x) = \frac{(-2x+3)(x-2) - (-x^2+3x-1)1}{(x-2)^2} = \frac{-2x^2 + 4x + 3x - 6 + x^2 - 3x + 1}{(x-2)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 5}{(x-2)^2}$$

3. $h(x) = \frac{3x^3-x^2+x+1}{x^2+4x-1}$

Posons : $u = 3x^3 - x^2 + x + 1$ et $v = x^2 + 4x - 1$.
On a donc : $u' = 9x^2 - 2x + 1$ et $v' = 2x + 4$.

$$h'(x) = \frac{(9x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x - 1) - (3x^3 - x^2 + x + 1)(2x + 4)}{(x^2 + 4x - 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{9x^4 + 36x^3 - 9x^2 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + x^2 + 4x - 1 - (6x^4 + 12x^3 - 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 4x + 2x + 4)}{(x^2 + 4x - 1)^2}$$

On change les signes de la parenthèse car on a un signe- devant.

$$h'(x) = \frac{9x^4 + 36x^3 - 9x^2 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + x^2 + 4x - 1 - 6x^4 - 12x^3 + 2x^3 + 4x^2 - 2x^2 - 4x - 2x - 4}{(x^2 + 4x - 1)^2}$$

Puis ont calcule, sans se tromper.

$$h'(x) = \frac{3x^4 + 24x^3 - 14x^2 - 5}{(x^2 + 4x - 1)^2}$$

Exercice 3

Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

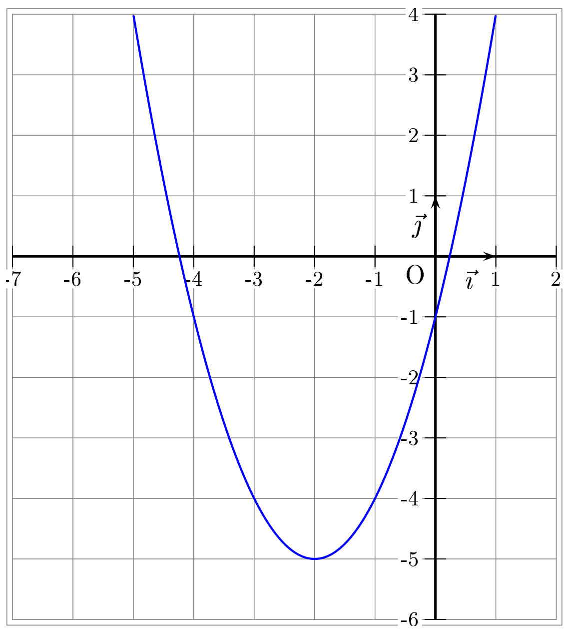
   Domaine de définition : Aucune valeur interdite, donc : $D_f = \mathbb{R}$.

   Dérivée :
$$f'(x) = 2x + 4$$

   Tableau de variations :
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = -2$$
   La dérivée s'annule pour $x = -2$.
   Et : $f(-2) = 4 - 8 - 1 = -5$.
   Ce qui nous donne le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-5	$\nearrow$	

   Représentation graphique :



2. $g(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 4$

   Domaine de définition :Aucune valeur interdite, donc : $D_g = \mathbb{R}$.

   Dérivée :
$$g'(x) = -3x^2 + 6x + 1$$

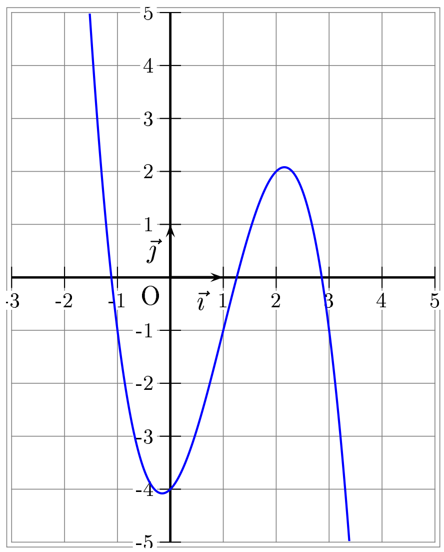
   Tableau de variations : Trouvons les racines du polynôme dérivée de la fonction g en calculant le Δ.
$$\Delta = 36 - 4 \times (-3) \times 1 = 36 + 12 = 48$$
   On a : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.
   Les racines de $g'(x)$ sont donc :
$$x_1 = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-6} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$
$$x_2 = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-6} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

De plus, $g(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}) = -4,08$ et $g(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}) = 2,08$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$-4,08$	$\nearrow$	$2,08$	$\searrow$	

Représentation graphique :



3. $h(x) = \frac{-x^2+4x-3}{x+3}$

Domaine de définition : On a une fraction. Qui dit fraction dit valeur interdite car le dénominateur contient l'inconnue x.
Le dénominateur doit être différent de 0.

$$x + 3 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -3$$

Dérivée : La dérivée d'un quotient, rien de plus simple.
On a : $u = -x^2 + 4x - 3$ et $v = x + 3$.
Donc : $u' = -2x + 4$ et $v' = 1$.

$$h'(x) = \frac{(-2x+4)(x+3) - (-x^2+4x-3)1}{(x+3)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 4x + 12 + x^2 - 4x + 3}{(x+3)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 15}{(x+3)^2}$$

Tableau de variations : Le dénominateur étant un carré, toujours positif, le signe de la dérivée est le signe du numérateur.
Soit $P(x) = -x^2 - 6x + 15$ le numérateur de la dérivée.
Les racines de P sont facilement calculables.

$$\Delta = 36 - 4 \times (-1) \times 15 = 36 + 60 = 96$$

On a : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{96} = \sqrt{4 \times 4 \times 6} = 4\sqrt{6}$.
On a donc les deux racines de P :

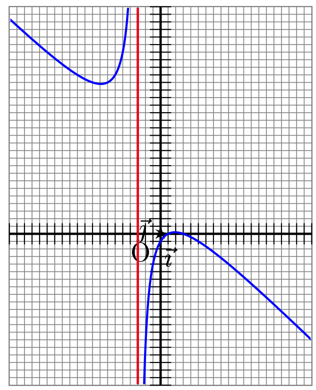
$$x_1 = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{-2} = -3 - 2\sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{6 - 4\sqrt{6}}{-2} = -3 + 2\sqrt{6}$$

Voici donc le fameux tableau de variations, très simple.

x	$-\infty$		x_1		-3		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Représentation graphique :



Exercice 4

1. Calculer les tangentes en $A(0;-2)$ et $B(-2;2)$ de la fonction $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

   Calculons la dérivée de cette fonction, nous allons en avoir besoin.

   $$f'(x) = 4x - 4$$

   On applique bêtement la formule du cours.

   $$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A) = (-4)(x - 0) + 3 = -4x + 3$$

   $$y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B) = (-8 - 4)(x + 2) + (2 \times 4 + 8 + 3) = -12(x + 2) + 19 = -12x - 24 + 19 = -12x - 5$$

2. Calculer les tangentes en aux points d'abscisses 5 et -2 de la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

   Calculons la dérivée de cette fonction, nous allons en avoir besoin.

   $$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

   On applique bêtement la formule du cours.

   $$y = f'(5)(x - 5) + f(5) = (75 - 20 - 1)(x - 5) + (125 - 50 - 5 + 1) = 54(x - 5) + 71 = 54x - 270 + 71 = 54x - 199$$

   $$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) = (12 + 8 - 1)(x + 2) + (-8 - 8 + 2 + 1) = 19(x + 2) - 13 = 19x + 38 - 13 = 19x + 25$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

1. Calculer la dérivée de f.

   $$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

2. Etudier le signe de cette dérivée.

   Calculons, à l'aide de Δ, les racines de ce polynôme dérivé.

$$\Delta = 64 - 4 \times 3 \times 4 = 16$$

   D'où les racines suivantes :

$$x_1 = \frac{8+4}{6} = 2$$

$$x_1 = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

   Voici donc le tableau de signes.

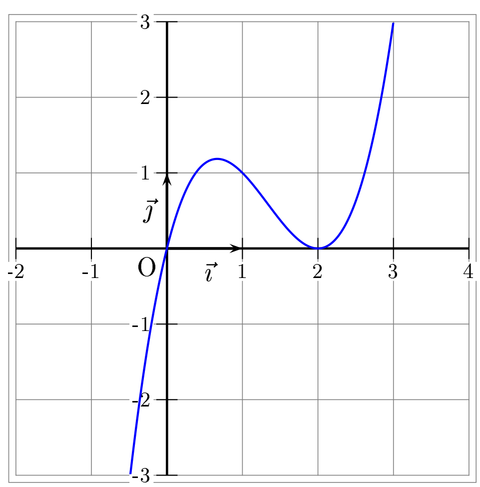
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

   Là où la dérivée est positive, la fonction est croissante, et là où elle est négative, la fonction est décroissante.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans l'intervalle $[-1, 3]$.



5. Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses.

   Les points d'intersection de la fonction avec l'axe des abscisses sont tout simplement les points où la fonction s'annule.
   On le voit aisément sur le graphique (0 et 2), mais on nous demande par calcul, donc calculons.

$$f(x) = 0 \iff x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \iff x(x^2 - 4x + 4) = 0 \iff x(x-2)^2 = 0$$

   Les solutions de cette équation sont : $x = 0$ ou $x = 2$.
   En remplaçant dans la fonction, on trouve que l'ordonnée des ces deux points est nulle.

Exercice 6

Soit un rectangle dont le périmètre P est égal à 4cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}cm^2$.

   On sait que le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l est : $2(L+l)=4$, soit $L+l=2$.
   De plus, l'aire de ce même rectangle est : $L \times l = \frac{3}{4}$.
   On a donc un système de deux équations à deux inconnues. Résolvons-le.

   $$L + l = 2 \Longleftrightarrow L = 2 - l$$

   On met tout cela dans la seconde égalité.

   $$L \times l = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow (2-l)l = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow 2l - l^2 = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow l^2 - 2l + \frac{3}{4} = 0$$

   Il nous suffit donc de résoudre cette équation du second degré pour déterminer l'inconnue l, puis L.
   Calculons donc le discriminant.

   $$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times \frac{3}{4} = 4 - 3 = 1$$

   D'où les racines suivantes.

   $$x_1 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

   $$x_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

   Donc, $l = \frac{3}{2}$ et $L = 2 - l = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ou $l = \frac{1}{2}$ et $L = 2 - l = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2. On cherche à présent les dimensions du rectangle de façon à ce que sont aire S soit maximale.

   (a) Exprimer S en fonction de l.

   D'après la formule de l'aire d'un rectangle : $S = l \times L$=l(2-l).

(b) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
Calculer sa dérivée et le signe de celle-ci afin de dresser le tableau de variation de cette fonction f. Puis tracer la courbe représentative de cette fonction dans l'intervalle $[0, 2]$.

Calculons la dérivée de cette fonction très simple $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$.

$$f'(x) = 2 - 2x$$

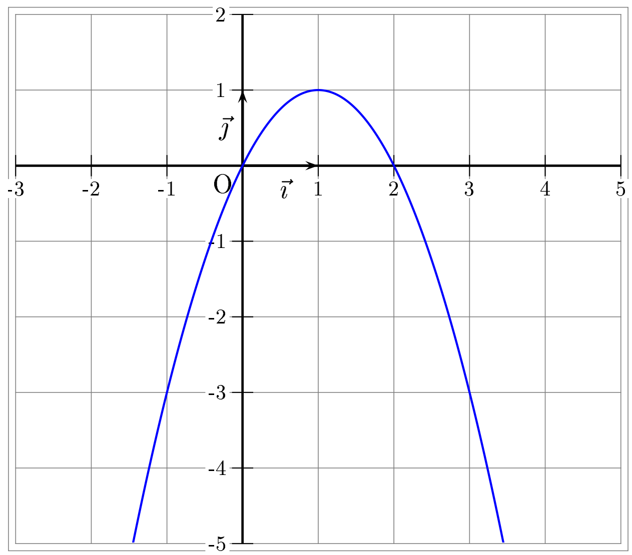
Quand cette dérivée s'annule-t-elle ?

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow 2x = 2 \Longleftrightarrow x = 1$$

Dressons donc le tableau de variations de la fonction f.

x	$+\infty$		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Et voici donc le tracé de la fonction.



(c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4cm et l'aire S est maximale.

La fonction f représente en fait l'aire du rectangle. Cette aire est maximale quand la fonction f l'est, c'est à dire quand sa dérivée s'annule, soit au point de coordonnées $(1;1)$.
On en conclut donc les dimensions du rectangle $L = l = 1$ pour que le périmètre soit égal à $4cm$ et l'aire maximale.
D'ailleurs, ses dimensions se vérifient aisément.

Exercice 7

On considère le fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x) = x - 1$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

1. Etude de f :
   (a) Calculer la dérivée de f.

   $$f'(x) = 1$$

   (b) Etudier le signe de cette dérivée.

   La dérivée est constante égale à 1, donc toujours positive.

   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   La dérivée est toujours strictement positif, donc la fonction est toujours strictement croissante.
   On aurait pu directement le deviner en regardant simplement la fonction vu que c'est une fonction affine.

x	$+\infty$ $\qquad$ $-\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

2. Etude de g :
   (a) Calculer la dérivée de g.
   On a : $u = x^2$ et $v = x - 1$.
   Donc : $u' = 2x$ et $v' = 1$.

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

(b) Etudier le signe de cette dérivée.

Le dénominateur étant strictement positif, car c'est un carré, le signe de la dérivée dépend que du numérateur.
Mais quand es-ce que ce numérateur s'annule-t-il ? Quant l'un de ses facteurs est nuls.
Soit, pour $x = 0$ ou $x = 2$.

Attention à ne pas oublier la VALEUR INTERDITE dans le tableau.
Cette valeur interdite est 1.
On a donc le tableau de signe de la dérivée suivant.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

(c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

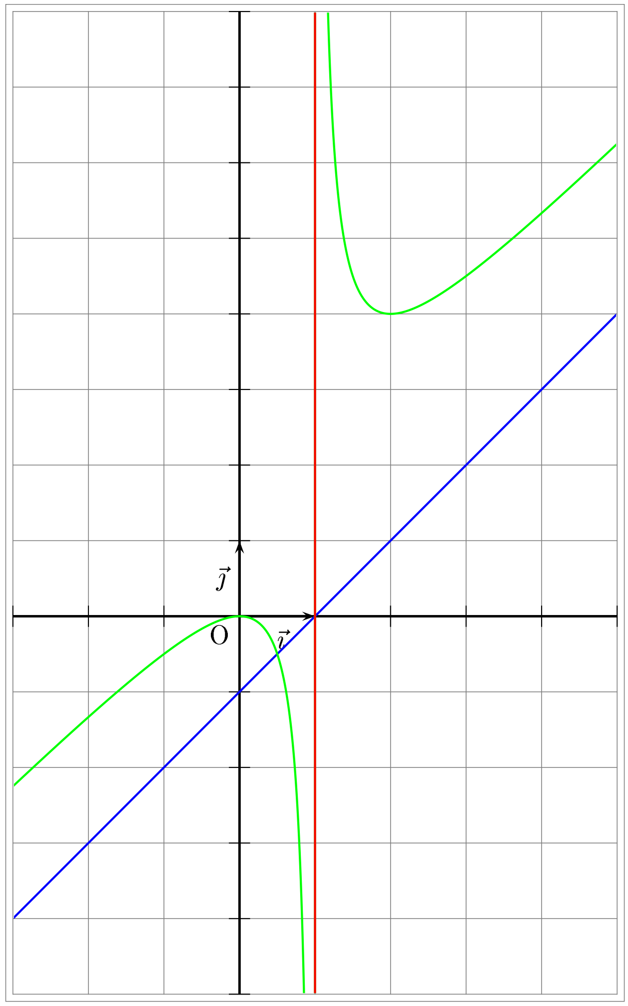
Là où la dérivée est positive, la fonction est croissante.
Là où la dérivée est négative, la fonction est décroissante.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

3. Comparaison des deux fonctions :

(a) Graphiquement :

i. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans un même repère dans l'intervalle $[-3, 5]$.



ii. Quels sont les coordonnées des éventuels points d'intersections de ces deux courbes ?

Par lecture graphique, les deux courbes se coupent en un point, que l'on notera A, de coordonnées $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

(b) Numériquement :

i. Quelle équation faut-il résoudre pour répondre à la question précédente ?

Il faut résoudre : $f(x) = g(x)$.

ii. La résoudre.

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x - 1 = \frac{x^2}{x-1}$$
$$\Longleftrightarrow (x-1)^2 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2$$
$$\Longleftrightarrow -2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On a trouvé le x, on remplace dans une des deux fonctions pour trouver le y.
On retrouve bien le point A de coordonnées $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.