Barycentre dans le plan

Dans ce chapitre, nous allons découvrir une notion nouvelle pour vous, celle du barycentre. Avant d'énoncé sa définition, je veux vous faire réfléchir sur le mot barycentre. Si on le décompose, on a le mot "bary" qui signifie "gravité" puis le mot "centre", donc le "centre de gravité". C'est tout à fait cela.

I - Définitions

Commençons par posé la notation.

Définition : Soit a un point du plan $\mathcal{P}$ et a un nombre réel.
On appelle **point pondéré de** $\mathcal{P}$, tout couple (A, a).
Le nombre a est appelé **coefficient** ou **poids** du point A.

Pour l'instant on a posé la notation. On aura donc un couple (A, a) avec A étant un point et a un nombre représentant le poids de ce point a.
Exemple : $(E, 6)$ avec E un point du plan et 6 son poids.

A présent nous pouvons introduire la notion de barycentre.

Définition : Soit $\{(A_1; a_1); (A_2; a_2); ...; (A_n; a_n)\}$ un système de n points pondérés tels que la somme des coefficients soit non nulle $(a_1 + a_2 + ... + a_n \neq 0)$.
Alors il existe un unique point G tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

Ce point G est appelé **barycentre** des points pondérés $(A_1; a_1); (A_2; a_2); ...; (A_n; a_n)$.

Remarque : Faites bien attention, la somme des coefficients (ou poids) des points considérés doit être **NON NULLE** :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$$

Un propriété importante maintenant.

Propriété : Soit $\{(A_1; a_1); (A_2; a_2); ...; (A_n; a_n)\}$ un système de n points pondérés tels que la somme des coefficients soit non nulle.
Si $a_1 = a_2 = ... = a_n$, alors G est appelé **isobarycentre** du système de points pondérés $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Exemples :
Le barycentre des points pondérés $\{(A; 1); (B; 1)\}$ est le point G, milieu du segment $[AB]$. C'est l'isobarycentre.

Le barycentre des points pondérés $\{(A; 1); (B; 1); (C, 1)\}$ est le point G, centre de gravité du triangle ABC. C'est aussi l'isobarycentre.

II - Propriétés du barycentre

Dans cette section, je vais vous énoncé plusieurs propriétés sur le barycentre.

Propriété : Lorsque l'on multiplie (ou divise) **tous** les coefficients des points pondérés, le barycentre reste inchangé.

Exemple : Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A;4);(B;0);(C;1)\}$. Alors G est aussi le barycentre du système de points pondérés $\{(A;8);(B;0);(C;2)\}$ et $\{(A;-4);(B;0);(C;-1)\}$.

Sans doute la plus important propriété du barycentre est celle qui suit.

Propriété : Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A_1;a_1);(A_2;a_2);...;(A_n;a_n)\}$.
Alors pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Exemple : Soit le système de points pondérés $\{(A;2);(B;-3);(C;4)\}$. On vérifie que $2+(-3)+4=3\neq 0$. Soit le point G barycentre de ce système de points pondérés.
On a donc, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \times (2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC})$$

Théorème d'associativité : Le barycentre d'un système de points pondérés $\{(A_1;a_1);(A_2;a_2);...;(A_n;a_n)\}$ reste inchangé lorsque l'on remplace deux ou plusieurs points pondérés de ce système par leur barycentre (s'il existe) affecté de leur masse.

Ce théorème va beaucoup nous aider pour construire des barycentre vous allez voir.

Exemple : Soit ABC un triangle. On veut construire le barycentre du système de points pondérés $\{(A;8);(B;4);(C;4)\}$.

Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(B;4)$ et $(C;4)$. C'est le même que celui des points pondérés $(B;1)$ et $(C;1)$, et celui-ci, nous l'avons vu, c'est le centre du segment $[BC]$.

Le théorème d'associativité nous dit que le barycentre du système de points pondérés $\{(A;8);(B;4);(C;4)\}$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(A;8);(G_1;8)\}$.
Or, encore une fois ici, le poids du point A est égal au poids du point G_1, donc G est le milieu du segment $[AG_1]$.

Pour construire G, rien de plus simple. On construit d'abord G_1, milieu de $[BC]$, puis le point G, milieu de $[AG_1]$.

Voici une propriété un plus plus compliqué, mais intéressante.

Propriété : Soit f une transformation (symétrie, homothétie ou rotation) et G le barycentre du système pondéré $\{(A_1;a_1);(A_2;a_2);...;(A_n;a_n)\}$.
Alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(f(A_1);a_1);(f(A_2);a_2);...;(f(A_n);a_n)\}$

Si par exemple f est une symétrie par rapport à un axe $[AB]$ et G le barycentre des points pondéré $(A_1;a_1);(A_2;a_2);...;(A_n;a_n)$.
Bien, $f(G)$ qui est le point symétrique du point G par rapport à l'axe $[AB]$ est le barycentre des points pondéré $(f(A_1);a_1);(f(A_2);a_2);...;(f(A_n);a_n)$ avec $f(A_1)$ le symétrique de A_1 par rapport à l'axe $[AB]$, $f(A_2)$ le symétrique de A_2 par rapport à l'axe $[AB]$, etc.

Mais à quoi va bien nous servir le barycentre ?
J'y viens dans la section suivante.

III - Applications

Vous allez certainement me dire : A quoi bon ? Pourquoi encore une nouvelle notion à apprendre alors qu'on en a déjà beaucoup d'autres ?
Le barycentre va nous simplifier drôlement la vie. Regardez.

Pour montrer que trois points sont alignés, il vous suffira de montrer que l'un de ces points est barycentre des deux autres et le tour est joué.

Ou encore : pour montrer que des droites sont concourantes. En effet, vous montrez que ces droites passent par différents barycentres partiels provenant de différents points pondérés. Et que le barycentre de tous ces points pondérés est le point de concours de ces droites.

Essayons !

Exemple : Soit un quadrilatère $ABCD$. I milieu de $[AC]$ et J celui de $[DB]$.
On donne la relation suivante : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC})$.
Le but set de montrer que les points I, J et G sont alignés.

Que connait-on de tous ces points ? La relation ! Alors partons de là.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC})$$

On multiplie tout par 2.

$$2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$$

Puis on utilise la relation de Chasles :

$$2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}$$

Soit :

$$2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG}$$
$$2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{DG} = 0$$
$$-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$$

Revenons à la définition du barycentre. Cette égalité signifie que G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A; -2); (B; 1); (C; -2); (D; 1)\}$.

On remarque aisément que les points A et C, ainsi que les points B et D ont les mêmes coefficients. On va donc les rassembler : $\{(A; -2); (C; -2); (B; 1); (D; 1)\}$.

On sait que quand deux points ont les même poids, leur barycentre est le milieu du segment.

Or, ici I milieu de $[AC]$ et J celui de $[DB]$. Cela nous fait donc, en additionnant les poids : $\{(I; -4); (J; 2)\}$.

On a donc que G est le barycentre du système pondéré $\{(I; -4); (J; 2)\}$.

Conclusion : les points I, J et G sont alignés.