Triangles isométriques et triangles semblables

Après les rappels de collèges sur toute la géométrie, nous allons travailler sur les triangles plus particulièrement.
Il serait préférable que vous soyez au point sur le chapitre précédent pour attaquer celui-ci. C'est un conseil que je vous donne.

www.mathsbook.fr

I - Triangles isométriques

1 - Définitions

On va parler ici de **triangles isométriques**. Les deux mots sont au pluriel. Cela vous donne déjà un indice quand à la définition que je vais vous donner.
Mais d'abord, dans triangles isométriques, on a le mot "isométrique" qui vient du mot "isométrie". Je vais vous définir cela.

Définition : Une **isométrie** est une transformation qui conserve les distances.

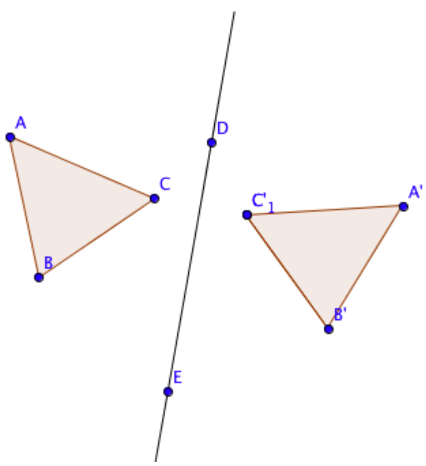
Exemple : La translation et la rotation sont des isométries. Les symétries centrales et axiales aussi.

Vous devez avoir maintenant une idée de ce que sont deux triangles isométriques. Non, Toujours pas ?

Définition : Deux triangles sont **isométriques** si l'un est l'image de l'autre par une ou plusieurs isométries successives.

En fait, deux triangles isométriques sont deux triangles qui ont les côtés égaux. Se sont deux triangles parfaitement égaux, qui ont simplement était retourné, ou inverser, etc.

Exemple : Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques car ils sont images l'un de l'autre par la symétrie d'axe (DE).



2 - Propriétés

Après la définition, vous vous doutez bien que ces triangles ont des belles propriétés. Eh bien, allons-y.

Propriétés : Voici les propriétés pour montrer que deux triangles sont isométriques.
– Si deux triangles ont leurs trois côtés égaux, alors ils sont isométriques.

– Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

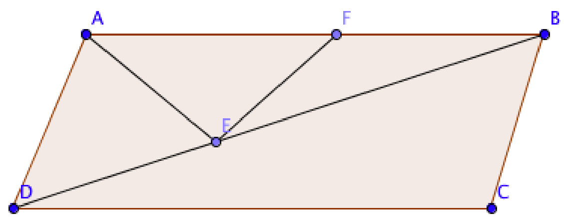
– Si deux triangles ont un côté égal et deux angles égaux, alors ils sont isométriques.

Résumons. Pour démontrer que deux triangles sont isométriques il faut, au choix :

- Trois côtés égaux,
- Un angles et les deux côtés égaux,
- Un côté et deux angle égaux.

Et pour montrer tout cela, vous avez la panoplie de propriétés et de théorèmes que je vous ai récapitulé au chapitre précédent.

Exemple : Soit le parallélogramme $ABCD$ suivant. (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$ et on a $DA = AF$.

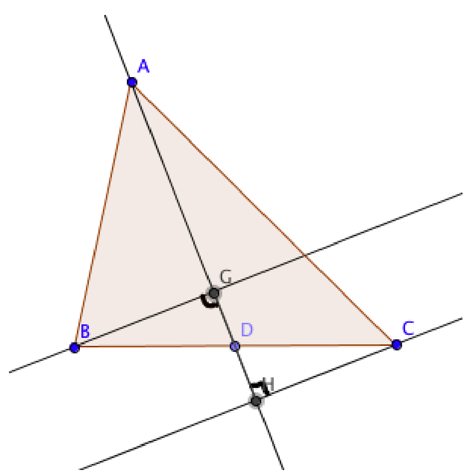


Montrons que les triangles ADF et FDE sont isométriques.

On sait que la droite (AE) est bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Donc, les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{EAF}$ sont égaux.
De plus, d'après l'énoncé, les côtés $[DA]$ et $[AF]$ sont égaux.
Les triangles DAE et EAF ont un côté en commun, $[AE]$.
On a donc deux côtés égaux et un angle égaux.
On peut donc en conclure que les triangles ADE et AFE sont isométriques.

Voici un exemple un peu plus compliqué.

Exemple : Soit la figure suivante :



On considère un triangle ABC. Le point D est le milieu du côté $[BC]$.
Les droites (AD) et (BG) sont perpendiculaire.
Les droites (AD) et (CH) sont perpendiculaire.
Montrer que les triangles BDG et DCH sont isométriques.

D'après l'énoncé, le point D est le milieu du segment $[BC]$. Donc on a : $BD = DC$.
De plus, les triangles BDG et DCH sont rectangles, ils ont donc un angle égaux, égal à 90°.
Ensuite, les angles $\widehat{BDG}$ et $\widehat{HDC}$, étant opposés par leur sommet, sont égaux : $\widehat{BDG} = \widehat{HDC}$.
On a gagné. Je rajoute juste que dans un triangle, la somme des angles étant égale à 180°, on a en fait les trois angles des deux triangles égaux.
Trois angles et un côté égaux, on peut conclure que les triangles BDG et DCH sont isométriques.

II - Triangles semblables

1 - Définition

Les triangles semblables à présent.

Définition : Deux triangles sont **semblables** si leurs trois angles sont égaux.

Deux triangles semblables sont deux triangles ayant subit un agrandissement ou une réduction. En effet, lorsque l'on agrandit (ou réduit) un triangle, on modifie la longueur de ses côtés, mais on ne touche en aucun cas à ses angles.

2 - Propriétés

Les propriétés ses triangles semblables.

Propriété : Deux triangles semblables ont leurs côtés proportionnels.

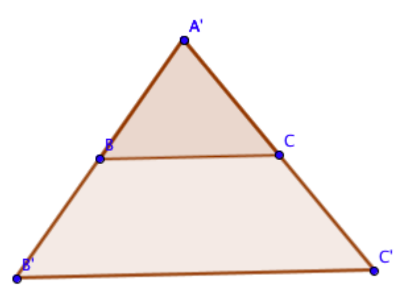
Et oui, vu qu'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction.
Dans ces cas là, on va parler de **coefficient de proportionnalité**.

Définition : Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables.
On appelle **coefficient de proportionnalité** pour transformer ABC en $A'B'C'$, le rapport :

$$k = \frac{A'B'}{AB}$$

Plusieurs valeurs de k possibles :
- Si $k < 1$, alors c'est un **coefficient de réduction**.
- Si $k > 1$, alors c'est un **coefficient d'agrandissement**.
- Si $k = 1$, alors les deux triangles sont isométriques.

Exemple : On considère les triangles $A'BC$ et $A'B'C'$ de la figure ci-dessous.



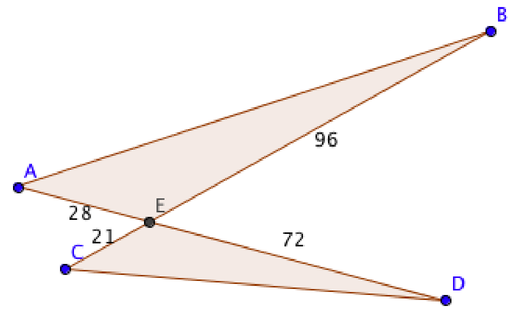
Les point B et C sont les milieux respectifs des côtés $[A'B']$ et $[A'C']$.
Donc, le côté $[A'B']$ mesure le double du côté $[A'B]$.
On fait de même pour le côté droit.
Les triangles $A'BC$ et $A'B'C'$ sont semblables, de coefficient d'agrandissement $k = 2$ pour passer de $A'BC$ à $A'B'C'$.

Je vais vous donner mieux pour montrer que deux triangles sont semblables.

Propriétés : Voici les propriétés pour montrer que deux triangles sont semblables.
- Si deux triangles ont leurs deux angles égaux (alors le troisième l'est aussi), alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont leurs côté proportionnels, alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont un angle égal et compris entre deux côtés proportionnel, alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont leurs côtés parallèles deux à deux, alors ils sont semblables.

Résumons. Pour démontrer que deux triangles sont semblables il faut, au choix :
- Deux angles égaux,
- Côtés proportionnels,
- Un angles et les deux côtés proportionnels,
- Trois côtés parallèles.

Exemple : Soit la figure suivante :



On a : $AE = 28$, $BE = 96$, $CE = 21$ et $DE = 72$.
Montrer que les triangles AEB et ECD sont semblables.

Les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{CED}$ sont égaux car ils sont opposés par leur sommet.
Nous avons les longueurs, utilisons les. Calculons les rapports des plus petits côtés et des plus grands.

$$\frac{AE}{CE} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{BE}{ED} = \frac{96}{72} = \frac{4}{3}$$

On remarque que les côtés sont proportionnels.
Donc, les triangles AEB et ECD sont semblables, de rapport $k = \frac{4}{3}$.