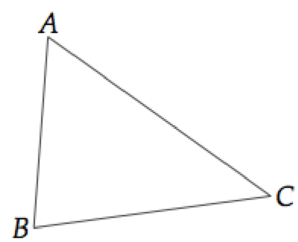
Triangles

Un chapitre complet sur les triangles. Ne pensez pas que puisqu'il n'y a qu'un mot dans le titre, il sera court, au contraire. Beaucoup de nouvelles notions vont être énoncées dans ce cours sur les triangles.
En effet, je vais commencer par vous définir la définition et les propriétés des triangles quelconques avant de vous lister les différents triangles particuliers que vous devez connaître par coeur et vous expliquer clairement comment construire un triangle en utilisant votre compas.
Une partie sur l'**inégalité triangulaire** également, qui vous servira jusqu'au bout, oui jusqu'au bout (je parle bien sûr du Bac !).
Les dernières parties traitent des **droites remarquables** dans un triangles. Oui, il y en a plusieurs qui auront un impact sur des propriétés importantes des triangles, notamment sur l'aire.
Vous êtes prêt ? C'est parti !

I - Définition du triangle

Commençons donc par le début : qu'es-ce qu'un triangle ? Déjà, qu'entendez-vous dans le mot "triangle" ? Il y a "tri" et "angles". On pourrait imaginer que c'est une figure à trois ("tri") angles. Eh bien oui, c'est ça.

Définition d'un triangle : Un triangle est un polygone qui possède trois côtés et donc 3 angles.
On nomme un triangle par 3 lettres en majuscules qui correspondent à ses 3 sommets comme le triangle ABC suivant :



Ce triangle ABC possède trois côtés : $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
Ainsi que trois angles : $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$.

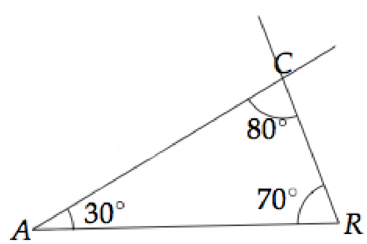
Donc oui, un triangle est un polygone à trois côtés et (donc) trois angles. Ses côtés se nomment avec les lettres (toujours en majuscule) qui nomment ses extrémités et pour l'angle, par exemple l'angle $\widehat{ABC}$, parcourez le chemin A puis B puis C dans ce triangle, cela forme un angle. En fait, c'est l'angle de la lettre du milieu, soit pour $\widehat{ABC}$, c'est l'angle $\widehat{B}$, mais il faut quand même l'entourer des autres lettres.

II - Somme des angles d'un triangle

Mais la somme des angles d'un triangle vaut combien ? C'est une **propriété fondamentale sur les triangles** que je vais vous énoncer maintenant.

Somme des angles d'un triangle : La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exemple : Soit le triangle CAR suivant :



Dans ce triangle :
- L'angle $\widehat{CAR}$ mesure 30°,

- L'angle $\widehat{CRA}$ mesure 70°,
- L'angle $\widehat{RCA}$ mesure 80°.

En effet, la somme des angles de ce triangle vaut bien 180° :

$$\widehat{CAR} + \widehat{CRA} + \widehat{RCA} = 30 + 70 + 80 = 180^\circ$$

Cette propriété est **toujours** vraie dans un triangle, quelque soit le triangle. Oui, car on différencie plusieurs triangles en fonction de la longueur de leurs côtés ou de la mesure de leurs angles, c'est ce que je vous apprend dans la partie suivante.

Exemple : Si un triangle a deux angles qui valent respectivement 35° et 67°, que vaut le troisième angle ?

$$180 - (35 + 67) = 180 - 102 = 78^\circ$$

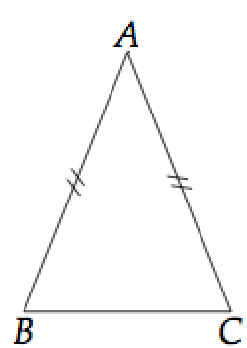
III - Triangles particuliers

Il existe plusieurs triangles particuliers en fonction de la longueur de leurs côtés ou de la mesure de leurs angles. En effet, il y a des triangles qui ont deux côtés, d'autres dont les trois côtés sont égaux, etc. Je vais vous les énoncer dans cette partie.

1 - Triangle isocèle

On commence par le **triangle isocèle**. Encore une fois, essayons de décortiquer le mot "isocèle". Il est composé de "iso" qui signifie "égal"... Vous avez trouvé ?

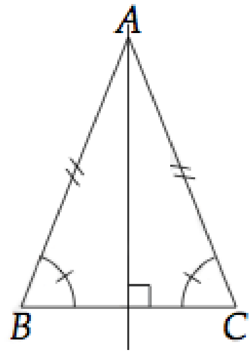
Triangle isocèle : Un triangle isocèle est un triangle qui possède deux côtés de même longueur.



Dans le triangle ci-dessus, les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont égaux. De plus, on dit que le triangle ABC est isocèle en A. La base principale de ce triangle est le côté opposé à A, soit $[BC]$.

Donc, deux angles égaux pour le triangle isocèle. Et les angles ?

Propriétés du triangle isocèle : Deux propriétés importantes sur les triangles isocèles :
- Les deux angles de la base principale d'un triangle isocèle sont égaux.
- Le triangle isocèle possède un axe de symétrie qui passe par son sommet principal et qui est la médiatrice de la base principale.



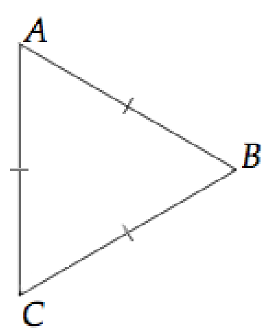
Dans le triangle ci-dessus, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux

Je vous explique dans une partie suivante ce qu'est plus généralement la **médiatrice** d'un côté d'un triangle.

2 - Triangle équilatéral

Le **triangle équilatéral**. Décortiquons le mot "équilatéral". Il est composé de "équi" qui signifie "égal" et de "latéral" qu'on pourrait traduire en "côté". Donc, un triangle équi-latéral est ... ?

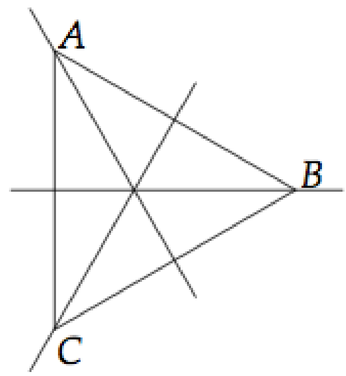
Triangle équilatéral : Un triangle équilatéral est un triangle qui possède trois côtés de même longueur.



Dans le triangle ci-dessus, les trois côtés du triangle ABC, à savoir $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, sont égaux.

Donc cette fois-ci, trois angles égaux pour le triangle équilatéral. Et les angles ? Il sont sans doutes les trois égaux. Et réfléchissons : si la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et que les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, que valent-t-il ?

Propriétés du triangle équilatéral : Deux propriétés importantes sur les triangles équilatéraux :
– Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux et valent 60°.
– Un triangle équilatéral possède 3 axes de symétries, chacun de ces axes passe par un sommet et est la médiatrice du côté opposé au sommet.



Dans le triangle ci-dessus, les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.

En effet, pour les angles :

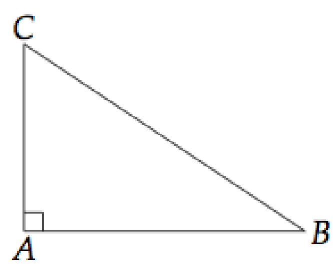
$$\frac{180}{3} = 60^{\circ}$$

Je reviendrai dans la suite de ce cours sur la notion de médiatrice.

3 - Triangle rectangle

Je crois que le triangle rectangle, vous le connaissez déjà, non ?

Triangle rectangle : Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.



Dans le triangle ci-dessus, le côté $[BC]$ du triangle ABC est appelé l'**hypoténuse** du triangle. De plus, on dit que le triangle ABC est rectangle en A.

L'hypoténuse est en fait le côté opposé à l'angle droit du triangle rectangle.

Le triangle rectangle aussi a des propriétés bien à lui. Les voici.

Propriétés du triangle rectangle : Deux propriétés importantes sur les triangles rectangles :
– L'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours plus longue que chacun des deux autres côtés.
– Dans un triangle rectangle les 2 angles autres que l'angle droit sont aigus et la somme de leurs mesures vaut 90 .

Ces propriétés sont logiques.
La seconde : encore une fois, si la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180° et que le triangle rectangle possède un angle droit (90°), la somme des deux autre vaut :

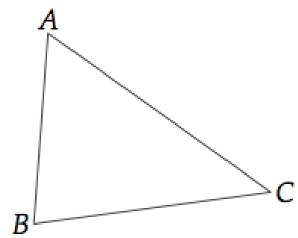
$$180 - 90 = 90^{\circ}$$

De plus, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse sera toujours toujours (je me répète exprès) le plus grand des côtés du triangle rectangle. C'est le principe de l'**inégalité triangulaire** que je vous explique dans la partie suivante.

IV - Inégalité triangulaire

Il existe des relations entre les côtés d'un triangle, des inégalités que l'on appelle les **inégalités triangulaires**.

Inégalité triangulaire : Prenons un triangle ABC quelconque.



On a les trois inégalités suivantes :

$$AB < AC + CB$$
$$AC < AB + BC$$
$$BC < BA + AC$$

Ces inégalités s'appelles les **inégalités triangulaires**. Elles sont vraies dans tous les triangles et signifient qu'un côté sera toujours inférieur à la somme des deux autres.

Je n'ai rien compris de tout ça, qu'es-ce que cela veut dire concrètement ?

C'est bien simple. En fait, l'inégalité triangulaire traduit le fait que la ligne droite est le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre.
Par exemple, si vous devez allez d'un point A à un point B. Pour que vous parcouriez le moins de trajet possible, il faut que vous faisiez une ligne droite. C'est ça l'inégalité triangulaire.

V - Construction d'un triangle

Je vous ai énoncé plusieurs triangles particuliers, mais je ne vous ai pas encore expliqué comment les construire ? Je vais le faire dans cette partie.

Tout d'abord, sortez votre **compas** et votre **rapporteur** !

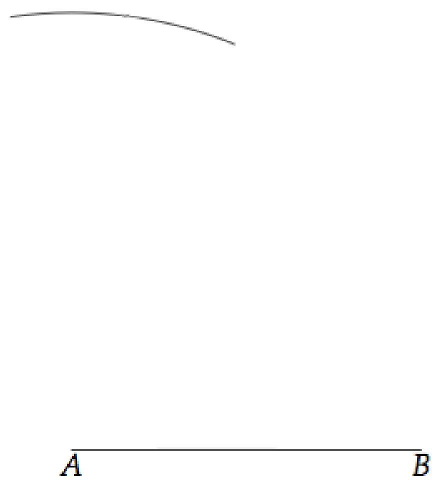
La construction d ?un triangle se ramène à un des 3 cas fondamentaux suivants que je vous explique à travers des exemples.

1er cas : on vous donne les longueurs des 3 côtés du triangle :

Construisons le triangle ABC tel que $AB = 4cm$, $BC = 6cm$ et $AC = 5cm$.

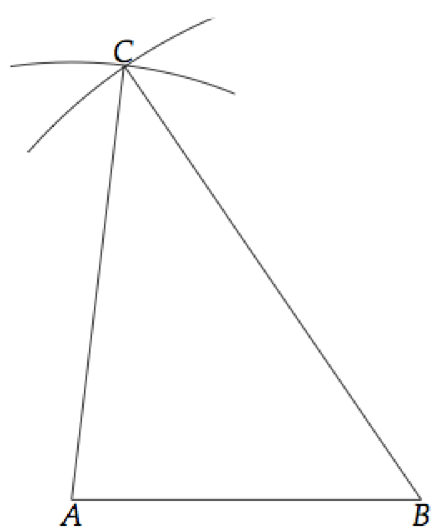
1. On commence par construire un côté au choix. Moi, je choisis de construire le côté $[AB]$ qui mesure 4cm.

2. On va ensuite construire le point C. On prend donc le compas et on fait un **arc de cercle** centré en A (c'est-à-dire que l'on point le compas en A) et de rayon 5cm (on ouvre le compas de 5cm) car $AC = 5cm$.



3. On va enfin construire le point B. On prend donc le compas et on fait un **arc de cercle** centré en B et de rayon 6cm car $BC = 6cm$.

4. On relie les 3 points de ce triangle et on a construit le triangle ABC.

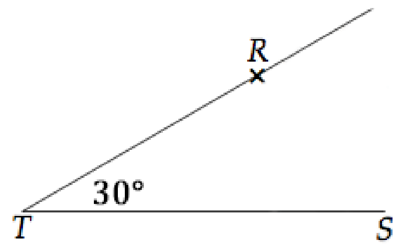


<u>2ème cas : on vous donne la mesure d'un angle et les longueurs des 2 côtés adjacents</u> :

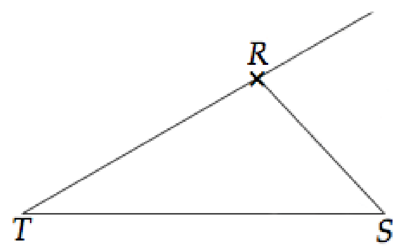
Construisons le triangle RTS tel que $RT = 3cm$, $TS = 4cm$ et $\widehat{RTS} = 30^{\circ}$.

1. On commence par construire un côté au choix. Moi, je choisis de construire le côté $[TS]$ qui mesure 4cm.

2. On va ensuite construire le point T. On prend donc le rapporteur cette fois-ci et on place le 0 en T et on prend un angle de 30°. On trace la demi-droite formé par l'angle de 30° et à 3cm on place le point R.



3. On relie les 3 points de ce triangle et on a construit le triangle RTS.

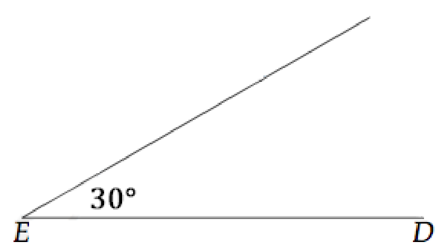


3ème cas : on vous donne la longueur d'un côté et les mesures des 2 angles adjacents :

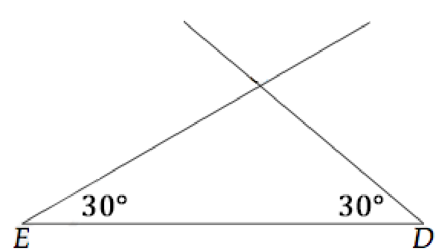
Construisons le triangle CDE tel que $ED = 5cm$, $\widehat{CED} = 30^\circ$ et $\widehat{CDE} = 40^\circ$.

1. On commence par construire le côté dont on connait la longueur : le côté $[ED]$ qui mesure 4cm.

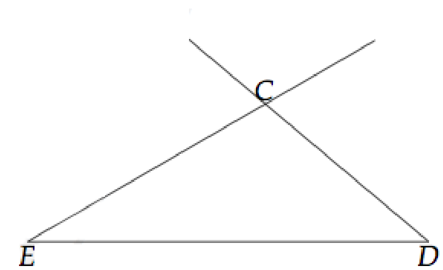
2. On prend donc le rapporteur et on place le 0 en E et on prend un angle de 30°. On trace la demi-droite formé par l'angle de 30°.



3. On reprend notre rapporteur et on place le 0 en D et on prend un angle de 40°. On trace la demi-droite formé par l'angle de 40°. Les point d'intersection des deux demi-droites formées est le point C



4. On relie les 3 points de ce triangle et on a construit le triangle CDE.



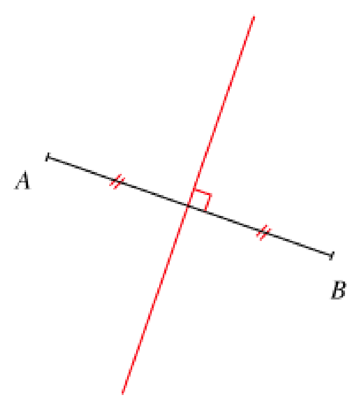
VI - Droites remarquables d'un triangle

Dans un triangle, il existe des droites qui ont une signification mathématiques et qui vont nous aider à faire des calculs sur les triangles, comme par exemple calculer leur aire.
Dans ce cours, nous allons en étudier les trois principales : les **médiatrices**, les **hauteurs** et les **médianes**.

1 - Médiatrice

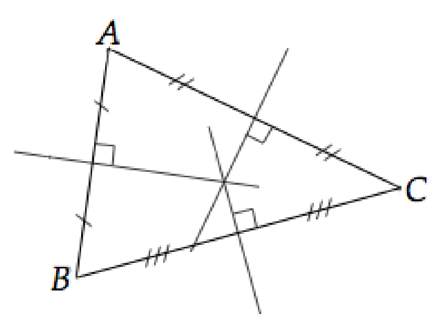
On commence par les médiatrices. On parlera de la **médiatrice d'un segment**.

Médiatrice : La médiatrice d'un segment est la droite qui passe perpendiculairement en son milieu.

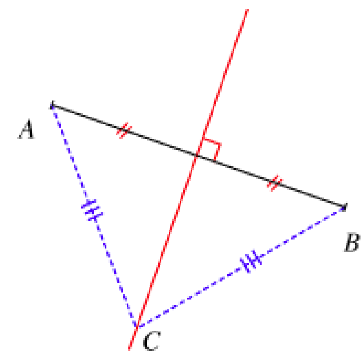


Donc, vous prenez un segment, vous tracer une droite qui passe par son milieu et qui y forme un angle droit. Cette droite est la médiatrice de ce segment.

Remarque : Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices de chacun des côtés.



Propriété des médiatrice : Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à égale distance des extrémités de ce segment.
Inversement, si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, il appartient à la médiatrice de ce segment.

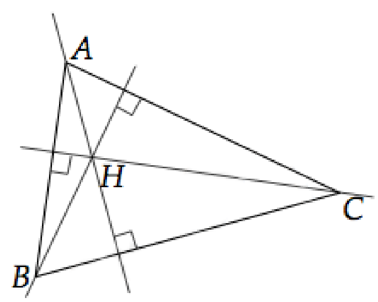


Remarque : Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point, le **centre du cercle circonscrit** au triangle. Une partie est consacré à ce point dans la fin de ce cours. Patience.

2 - Hauteur

Les **hauteurs d'un triangle** maintenant. J'en suis sûr que vous en avez déjà entendu parlé.

Hauteur : La hauteur issue d'un sommet d'un triangle est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.



Donc, vous prenez un côté d'un triangle, vous tracer une droite perpendiculaire à ce côté et passant par le sommet opposé. Cette droite est une des hauteurs du triangle. J'ai bien dis une des hauteurs du triangle car un triangle a trois côtés, donc trois hauteurs.

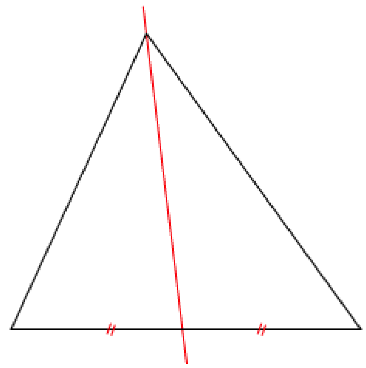
Remarque : Une hauteur peut être située à l'extérieur du triangle.

Remarque importante : Comme les médiatrices, les trois hauteurs du triangle se coupent en un même point appelé **l'orthocentre du triangle**.

3 - Médiane

Enfin les **médianes d'un triangle**.

Médiane : La médiane issue d ?un sommet d ?un triangle est la droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé.



Prenez un côté d'un triangle, vous tracer une droite qui passe par le milieu de ce côté et passant par le sommet opposé. Cette droite est une des médianes du triangle. J'ai bien dis une des médianes du triangle car un triangle a trois côtés, donc trois médianes.

Remarque importante : Comme les médiatrices et les hauteurs, les trois médianes du triangle se coupent en un même point appelé **le centre de gravité du triangle**.

Résumons les droites remarquables :
- Médiatrice d'un segment : Droite qui passe perpendiculairement en son milieu,
- Hauteur d'un triangle : Droite qui est perpendiculaire à un côté et qui passe par le sommet opposé,
- Médiane d'un triangle : Droite qui passe par le milieu d'un côté et par le sommet opposé.

Une fois les trois construites (3 médiatrices / 3 hauteurs / 3 médianes), ces droites ont un point commun : elle se coupent en un même point chacune :
- Médiatrices d'un triangles : Centre du cercle circonscrit,
- Hauteurs d'un triangle : Orthocentre,
- Médianes d'un triangle : Centre de gravité.

Dans la partie suivante, nous allons voir plus précisément ce qu'est le cercle circonscrit à un triangle.

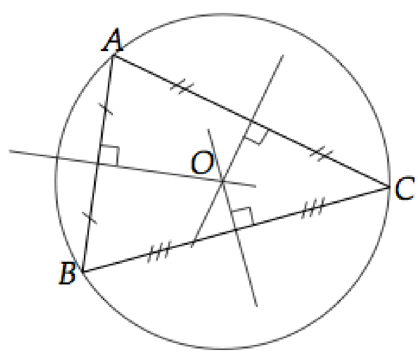
VII - Utilisation des droites remarquables du triangle

Dans cette dernière partie du cours sur les triangles, nous allons utiliser ces notions de droites remarquables et vous allez voir de vous-même qu'elle ne servent pas à rien.

1 - Cercle circonscrit à un triangle

J'en ai déjà parlé, je me répète. Après tout, l'art de la pédagogie c'est de se répéter.

Cercle circonscrit à un triangle : Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle. Son centre est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle.



Facile maintenant de construire le cercle circonscrit d'un triangle, il suffit de construire deux de ses médiatrices.

Remarque : Le centre du cercle circonscrit n'est pas obligatoirement situé à l'intérieur du triangle.

2 - Aire d'un triangle

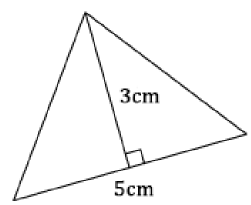
Vous avez dû déjà le remarquer, les hauteurs ont un lien avec la formule de l'aire d'un triangle.

Aire d'un triangle : L'aire d'un triangle est égale à la longueur d'une hauteur multipliée par celle du côté opposé, le tout divisé par 2 :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

Remarque : Vous souvenez-vous de l'aire d'un triangle rectangle ? C'était la moitié de l'aire du rectangle associé. Eh bien là c'est pareil mais avec le parallélogramme associé. En effet, l'aire d'un triangle est égale à la moitié de celle du parallélogramme associé.

Exemple : Soit le triangle suivant :



Sa base vaut 5cm et sa hauteur 3cm. Son aire vaut donc :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7,5cm^2$$