Corrigé du baccalauréat L spécialité Métropole–La Réunion 23 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** `n` extrémité de l'ombre du mat est l'intersection de la droite (HN) et de la droite (BM).
   L'ombre du mât est le segment [Mn].
   b. `p` ombre du point P est l'intersection de la droite (HP) et de la droite (BM).
2. **a.** On construit N_1 intersection de la droite (BM) et de la parallèle à (GC) contenant N. L'ombre du mât est le segment MN_1.
   b. Oui le projeté du milieu est le milieu des projetés (Thalès).
3. **a.** Comme C milieu de [BM] est dans le plan frontal, `c` est le milieu de [`bm`].
   `d` est le point d'intersection de (`bf`) et de (`c`F).
   Enfin `e` est le point d'intersection de (`mf`) et la parallèle à (`bm`) contenant `d`.
   b. `h` est obtenu comme quatrième sommet du rectangle construit sur `c`, `b`, `g`.
   `i` est le point commun à (`h`F) et de la verticale contenant `d`.
   `j` est obtenu comme quatrième sommet du rectangle construit sur `e`, `d`, `i`.
   `k` est le point commun à (`j`F) et de la verticale contenant `f`.
   Enfin `l` est le point commun à (`g`F) et de l'horizontale contenant `k`.

EXERCICE 2 **6 points**

1. Montrer que $U_1 = U_0 + 2(0+1) = 0+2 = 2$;
   $U_2 = U_1 + 2(1+1) = 2+4 = 6$;
   $U_3 = U_2 + 2(2+1) = 6+6 = 12$;
2. Proposition 1 : $U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2$, donc la suite n'est pas arithmétique.
   Proposition 2 : $U_2 = 1^2 + 1$:vrai pour $n = 2$.
   Proposition 3 : $U_0 = 0 \neq 0^2 + 1$: faux.
3. On considère l'algorithme suivant :
   a. P = 0, K = 0 Affichage 0
   K = 1 Affichage 1
   K = 2 Affichage 3
   K = 3 Affichage 6 On n'obtient pas les quatre premiers termes de la suite.
   b. Il suffit de remplacer « Affecter à P la valeur P + K » par « Affecter à P la valeur P + 2K ».
4. **a.** On a $\left(k^2+k\right)+2(k+1) = k^2+k+2k+2 = k^2+2k+1+k+1 = (k+1)^2+(k+1)$.
   b. • On a $U_0 = 0^2 + 0 = 0$: vrai.
   • Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k = k^2 + k$.
   Par définition de la suite : $U_{k+1} = U_k + 2(k+1) = k^2 + k + 2(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$, d'après le résultat précédent.
   On a donc $U_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1)$ la propriété est « héréditaire », donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = n^2 + n$.
   Ainsi $U_3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$.

EXERCICE 3 **4 points**

1. On a $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x}$ puisque $x \neq 0$.
   Sur $[1\,;\,15]$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}$.
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé $f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$.
3. On a $f(x) = 8$ si $2+3\ln x = 8$ ou $3\ln x = 6$ ou $\ln x = 2$ ou $\ln x = \ln \mathrm{e}^2$ et finalement $x = \mathrm{e}^2$.
   La seule solution de l'équation $f(x) = 8$ est le nombre e^2.
4. • On a vu que sur $[1\,;\,15]$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}$: ce nombre est positif sur $[1\,;\,15]$, donc la fonction est croissante.
   On peut donc éliminer la deuxième courbe.
   • On a vu que $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 8$, soit à peu près $f(7,38) \approx 8$.

On peut donc éliminer la troisième courbe puisque l'image de 7,38 est à peu près égale à 4,5 et non à 8.

• Reste la première courbe :
  - elle représente bien une fonction croissante sur $[1\,;\,15]$;
  - $f(1) = 2 = 2 + 3\ln 1$;
  - $f(7,38) \approx 8$;
  - L'image de 15 est à peu près égale à 10 et $f(15) = 2 + 3\ln 15 \approx 10,12$

Seule la première courbe peut être la représentation graphique de f.

EXERCICE 4 **5 points**

1. On a $10 \equiv -3 \quad (\text{modulo } 13)$.
   Donc $10^3 \equiv (-3)^3 \quad (\text{modulo } 13)$, soit
   $10^3 \equiv -27 \quad (\text{modulo } 13)$.
   Or $-27 \equiv -1 \quad (\text{modulo } 13)$.
   Finalement $10^3 \equiv -1 \quad (\text{modulo } 13)$.
2. **a.** Comme $10^6 = \left(10^3\right)^2$, $10^3 \equiv -1 \quad (\text{modulo } 13)$ entraîne que $10^6 \equiv (-1)^2 \quad (\text{modulo } 13)$, soit
   $10^6 \equiv 1 \quad (\text{modulo } 13)$, ce qui signifie que le reste de la division euclidienne de 10^6 par 13 est égal à 1.

   b. De même, comme $10^9 = \left(10^3\right)^3$ et $10^{12} = \left(10^3\right)^4$,
   $10^3 \equiv -1 \quad (\text{modulo } 13)$ entraîne $\left(10^3\right)^3 \equiv (-1)^3 \quad (\text{modulo } 13)$, soit
   $10^9 \equiv -1 \quad (\text{modulo } 13)$ et
   $10^3 \equiv -1 \quad (\text{modulo } 13)$ entraîne $\left(10^3\right)^4 \equiv (-1)^4 \quad (\text{modulo } 13)$, soit
   $10^{12} \equiv 1 (\text{modulo } 13)$.
3. **a.** En utilisant les résultats des questions 1. et 2.
   $10^{12} \equiv 1 (\text{modulo } 13)$ entraîne $5 \times 10^{12} \equiv 5 \times 1 \quad (\text{modulo } 13)$;
   $10^9 \equiv -1 (\text{modulo } 13)$ entraîne $292 \times 10^9 \equiv 292 \times (-1) \quad (\text{modulo } 13)$;
   $10^6 \equiv 1 (\text{modulo } 13)$ entraîne $729 \times 10^6 \equiv 729 \times 1 \quad (\text{modulo } 13)$;
   $10^3 \equiv -1 (\text{modulo } 13)$ entraîne $824 \times 10^3 \equiv 824 \times (-1) \quad (\text{modulo } 13)$.
   En sommant membres à membres :
   $5 \times 10^{12} + 292 \times 10^9 + 729 \times 10^6 + 824 \times 10^3 + 628 \equiv 5 - 292 + 729 - 824 + 628 \quad (\text{modulo } 13)$, soit
   $\mathrm{N} \equiv 246 (\text{modulo } 13)$.

b. On a $246 = 13\times19-1$ soit $246 \equiv -1 \pmod{13}$, donc on a $\text{N} \equiv -1 \pmod{13}$ qui signifie que N n'est pas divisible par 13.

c. On a $2010 = 2\times 729 + 20\times 3^3 + 4\times 3$.
Donc $10^{2010} = 10^{2\times3^6+20\times3^3+4\times3} = 10^{2\times3^6}\times10^{20\times3^3}\times10^{4\times3} = \left(10^{3^6}\right)^2\times\left(10^{3^3}\right)^{20}\times\left(10^3\right)^4$.

Or $10^{3^6} \equiv 1 \pmod{13}$, donc $\left(10^{3^6}\right)^2 \equiv 1 \pmod{13}$

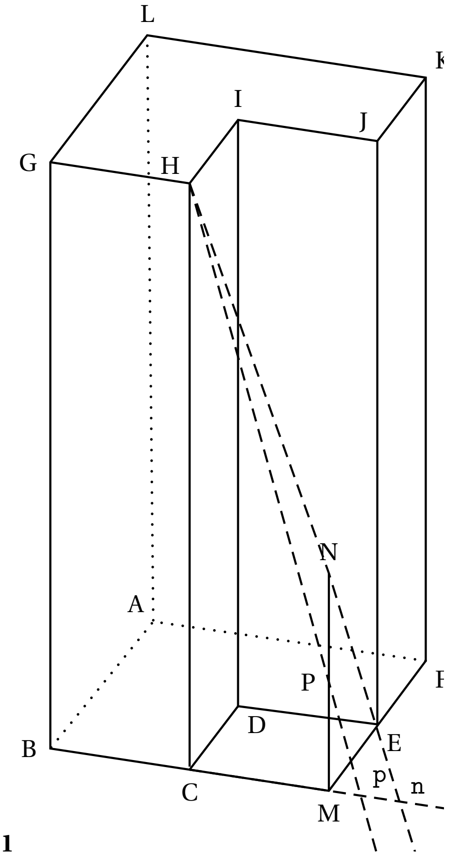
$10^{3^3} \equiv 1 \pmod{13}$, donc $\left(10^{3^3}\right)^{20} \equiv 1 \pmod{13}$,

$10^3 \equiv -1 \pmod{13}$, donc $\left(10^3\right)^4 \equiv 1 \pmod{13}$

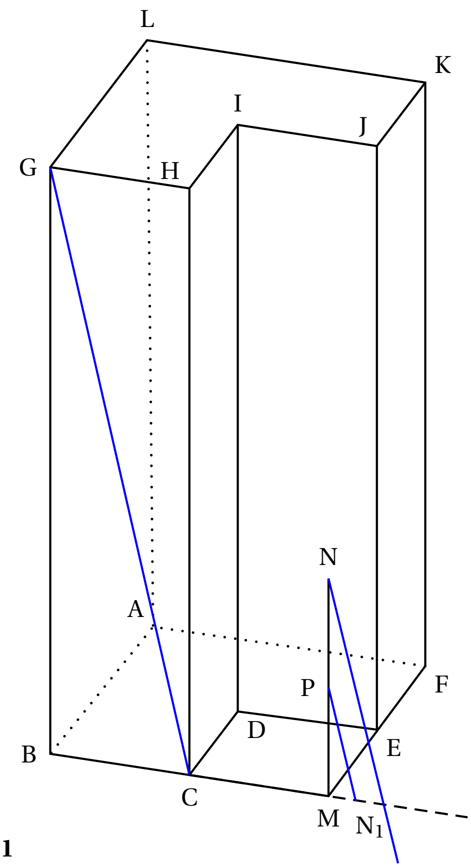
et enfin par produit $\left(10^{3^6}\right)^2\times\left(10^{3^3}\right)^{20}\times\left(10^3\right)^4 = 10^{2010} \equiv 1 \pmod{13}$.
Or $12 \equiv -1 \pmod{13}$ et finalement :
$10^{2010}+12 \equiv 1-1 \pmod{13}$ ou $10^{2010}+12 \equiv 0 \pmod{13}$, ce qui signifie que $10^{2010}+12$ est un multiple de 13.

Autre méthode (plus rapide) :
On a démontré plus haut que
$10^3 \equiv -1 \pmod{13} \quad (1)$.
Donc $10^{2010} = 10^{3\times670} = \left(10^3\right)^{670}$;
En utilisant le résultat (1) :
$10^{3\times670} \equiv (-1)^{670} \pmod{13}$ ou
$10^{3\times670} \equiv 1 \pmod{13}$.
Finalement : $10^{2010}+12 \equiv 1+12 \pmod{13}$ et
$10^{2010}+12$ est multiple de 13.

ANNEXES (à compléter et à rendre avec la copie)



Annexe 1 – Exercice 1



Annexe 2 – Exercice 1

Annexe 3 – Exercice 1