Baccalauréat L Amérique du Sud novembre 2010

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

EXERCICE 1 **7 points**

On considère les nombres A_n définis par $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ où n est un entier naturel.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
A_n					
Reste dans la division euclidienne de A_n par 13					

2. Les nombres suivants sont écrits dans le système de numération à base trois :

$$x = \left(\overline{1110}\right)_{\text{trois}} \quad ; \quad y = \left(\overline{1010100}\right)_{\text{trois}} \quad ; \quad z = \left(\overline{1001001000}\right)_{\text{trois}}$$

Sont-ils divisibles par 13 ? Justifier en utilisant ce qui précède.

3. On s'intéresse au reste dans la division euclidienne de $A_{1\,000}$ par 13.
   a. Justifier que $3^3 \equiv 1 \quad \text{mod } 13$.
   b. En déduire le reste dans la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 13.
   c. Quel est le reste dans la division euclidienne de $A_{1\,000}$ par 13 ?

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soit les propositions :
   (P_0) : pour tout entier naturel n, A_n est un multiple de 13.
   (P_1) : il existe au moins un entier naturel n tel que A_n est un multiple de 13.
   (P_2) : pour tout entier naturel n, si n est un multiple de 3, alors A_n n'est pas un multiple de 13 .

   Dire si chacune de ces propositions est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie 1

On considère l'algorithme suivant :

Entrée : n un entier naturel.

Initialisation : affecter à u la valeur 1 ;
affecter à S la valeur 1 ;
affecter à i la valeur 0.

Traitement : tant que $i < n$
affecter à u la valeur $2u + 1 - i$;
affecter à S la valeur $S + u$;
affecter à i la valeur $i + 1$.

Sortie : afficher u ;
afficher S.

Justifier que, pour $n = 3$, l'affichage obtenu est 11 pour u et 21 pour S.

Reproduire et compléter le tableau suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Affichage pour u				11		
Affichage pour S				21		

Partie 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n.$$

et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. Pour un entier naturel n donné, que représentent les valeurs affichées par l'algorithme de la partie 1 ?
2. Le but de cette question est d'exprimer u_n en fonction de n.
   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

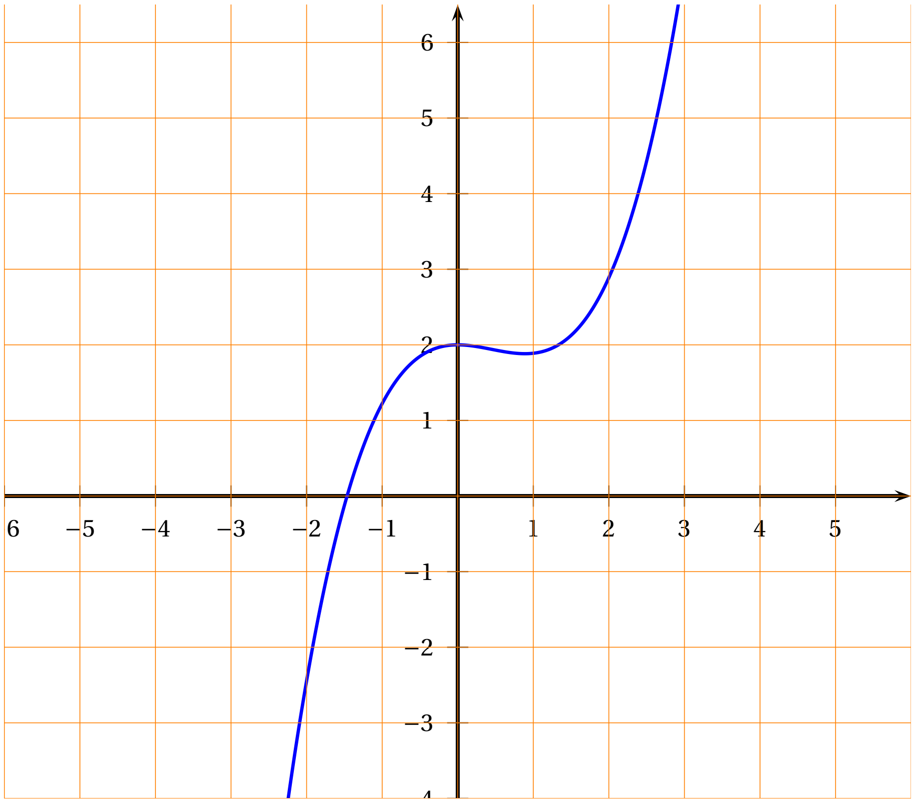
n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$u_n - n$						

   b. Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.
3. Le but de cette question est de calculer S_n en fonction de n et d'utiliser un résultat de la première partie pour contrôler l'exactitude de ce calcul.
   a. Exprimer en fonction de n les sommes : $1+2+\cdots+n$ et $1+2+2^2+\cdots+2^n$.
   b. En déduire une expression de S_n en fonction de n.
   c. Vérifier le résultat obtenu dans la première partie pour $n = 5$.

EXERCICE 3 **4 points**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses a., b., c. ou d. est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse n'enlève aucun point.
L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{4}{9}x^2 + 2$.
   Un dessin de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est donné ci-après :



a. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 0 et 1.

b. La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 3 passe par le point B de coordonnées $(0\,;\,-12)$.

c. La courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $y = 2$ en trois points distincts.

d. La courbe représentative de la fonction f' dérivée de f est une parabole dont le sommet a pour abscisse $0,5$.

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(2+x^2\right)\text{e}^{-x}$ a pour fonction dérivée la fonction g' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $g'(x) = \left(x^2+2x+2\right)\text{e}^{-x}$.

b. $g'(x) = 2x\text{e}^{-x}$.

c. $g'(x) = \left(-x^2+2x-2\right)\text{e}^{-x}$.

d. $g'(x) = -2x\text{e}^{-x}$.

3. Soit le nombre $\text{A} = 1\,789^{2\,010}$.

a. La calculatrice ne permet pas d'obtenir une valeur approchée à l'unité près de log A car ce nombre est trop grand.

b. A est un entier s'écrivant avec 6 537 chiffres dans le système décimal.

c. A est un entier s'écrivant avec 6 538 chiffres dans le système décimal.

d. $\log \text{A} = (\log(1\,789))^{2010}$.

4. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $\text{e}^{\ln(x)-4} < 1$ est :

a. $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{\text{e}}-4\right[$

b. $]0\,;\,\ln 4[$.

c. $\left]0\,;\,\text{e}^4\right[$.

d. $\left]-\infty\,;\,\text{e}^5\right[$..

EXERCICE 4 **4 points**

On s'intéresse aux tests de dépistage d'une maladie m. Un individu de la population étudiée étant choisi au hasard, on désignera par :

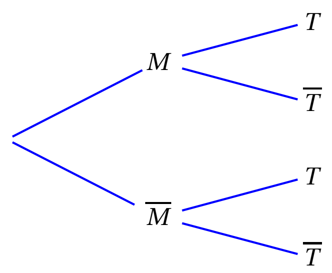
> M l'évènement « cet individu est atteint de la maladie m » ; $\overline{M}$ l'évènement contraire de M ;
> T l'évènement « le test pratiqué sur cet individu est positif » ; $\overline{T}$ est l'évènement contraire de T.

Pour un test de dépistage d'une maladie, le fabricant fournit en général deux indicateurs :

- la sensibilité ; c'est la probabilité pour qu'un individu malade ait un test positif ;
- la spécificité : c'est la probabilité pour qu'un individu non malade ait un test négatif.

On s'intéresse à une population dans laquelle on estime à 10 % le pourcentage des individus ayant la maladie m. On fait subir un test à tous les individus de cette population. Ce test a pour sensibilité $0,7$ et pour spécificité $0,8$. On choisit un individu au hasard dans cette population et on note $P(A)$ la probabilité d'un évènement A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. Sans calculs, donner $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.
2. Reproduire sur la copie l'arbre de probabilités ci-dessous et le compléter. Aucune justification n'est demandée.



3. Déterminer $P(M \cap T)$, $P(T)$ puis vérifier que la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif soit atteint de la maladie m est $0,28$.