Correction du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Les autres égalités s'obtiennent de façon semblable.

1. M est l'image de A dans la rotation de centre B et d'angle $+\frac{\pi}{3}$ ce qui se traduit par $m-b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-b) \iff m = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b$.
2. En utilisant les relations précédentes :
   a. Par différence des deux premières égalités $m-n = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-c)$
   et par différence des deux dernières :
   $q-p = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-c)$. On a donc par transitivité $m-n = q-p \iff \overrightarrow{\text{NM}} = \overrightarrow{\text{PQ}} \iff$ NMQP est un parallélogramme.

   b. Dans la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{3}$: $\begin{array}{ccc} \text{A} & \longmapsto & \text{Q} \\ \text{C} & \longmapsto & \text{P} \end{array}$

   Par propriétés de la rotation (qui est une isométrie), AC = QP et $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right) = +\frac{\pi}{3}$.

   De même dans la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, on a

   $\begin{array}{ccc} \text{B} & \longmapsto & \text{N} \\ \text{D} & \longmapsto & \text{P} \end{array}$

   Donc BD = NP et $\left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{NP}}\right) = -\frac{\pi}{3} \iff \left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
3. On sait déjà que MNPQ est un parallélograme ; il faut qu'en plus il ait deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires.
   Or NP = QP $\iff$ AC = BD d'après la question précédente.
   D'autre part $\left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right) = \frac{\pi}{2} \iff \left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) + \left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) + \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right) = \frac{\pi}{2} \iff \left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) - \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \iff \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{6}$, toutes ces égalités étant modulo π.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. La somme des coefficients est :
   $1+1-m+2m-1+1-m = 2 \neq 0$ quel que soit m. Le barycentre G_m existe donc quel que soit le réel m.
2. On a $\text{G}_1 = \text{bar}\{(\text{E}\ ;\ 1), (\text{B}, 0), (\text{G}\ ;\ 1), (\text{D}\ ;\ 0)\} = \text{bar}\{(\text{E}\ ;\ 1), (\text{G}\ ;\ 1)\}$ qui est tout simplement le milieu de [EG].
3. On a $\text{G}_0 = \text{bar}\{(\text{E}\ ;\ 1), (\text{B}, 1), (\text{G}\ ;\ -1), (\text{D}\ ;\ 1)\}$. On a donc par définition
   $1\overrightarrow{\text{G}_0\text{E}} + 1\overrightarrow{\text{G}_0\text{B}} - 1\overrightarrow{\text{G}_0\text{G}} + 1\overrightarrow{\text{G}_0\text{D}} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{\text{G}_0\text{A}} + \overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AG}} + \overrightarrow{\text{AD}} = \overrightarrow{0}$.
   Or $\overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} = \overrightarrow{\text{AG}}$, donc l'égalité précédente devient $2\overrightarrow{\text{G}_0\text{A}} = \overrightarrow{0} \iff \text{G}_0 = \text{A}$.
   $\text{G}_0 = \text{A}$ entraîne que A est le barycentre de $\{(\text{E}, 1), (\text{B}, 1), (\text{G}, -1), (\text{D}, 1)\} = \text{bar}\{(\text{I}, 3), (\text{G}, -1)\}$ par associativité des trois points E, B et D.
   La dernière relation montre que la barycentre A est aligné avec les points I et G.

4. Par définition du barycentre :
$\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{E}} + (1-m)\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{B}} + (2m-1)\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{G}} + (1-m)\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{D}} = \overrightarrow{0}$
soit en faisant intervenir le point A grâce à le relation de Chasles
$\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + (1-m)\left(\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + (2m-1)\left(\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}}\right) + (1-m)\left(\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \overrightarrow{0}$
soit en développant
$(1+1-m+2m-1+1-m)\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + (1-m)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (2m-1)\overrightarrow{\mathrm{AG}} + (1-m)\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{0} \iff$
$2\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} - m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2m\overrightarrow{\mathrm{AG}} - m\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{0}$
car dans le pavé : $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$
Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, la relation devient :
$2\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} - m\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 2m\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{0} \iff$
$\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} = \dfrac{m}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right)$
Or $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{EG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{O_2G}}$
donc on a
$\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} = \dfrac{m}{2}\left(2\overrightarrow{\mathrm{O_2G}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right) \iff \overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} = \dfrac{m}{2}\left(2\overrightarrow{\mathrm{O_2G}} + 2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right) \iff$
$\overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} = \dfrac{m}{2}\left(2\overrightarrow{\mathrm{O_2A}}\right) \iff \overrightarrow{\mathrm{G}_m\mathrm{A}} = m\overrightarrow{\mathrm{O_2A}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AG}_m} = m\overrightarrow{\mathrm{AO_2}}$
Cette dernière égalité montre que le point G_m appartient à la droite $(\mathrm{AO_2})$ et plus précisement que le point G_m a pour abscisse m si le repère choisi est le couple $(\mathrm{A},\ \mathrm{O_2})$.
Ainsi on retrouve que G_0 a pour abscisse 0, donc est égal au point A et que G_1 a pour abscisse 1 et est donc égal au point $\mathrm{O_2}$.

5. **a.** $\mathrm{O_2}$ est le milieu de [EG], donc la droite $(\mathrm{AO_2})$ appartient au plan (ACGE) ; on vient de démontrer que G_m appartient à la droite $(\mathrm{AO_2})$: donc G_m appartient au plan (ACGE) et enfin $\mathrm{O_1}$ étant le mileu de [AC] appartient lui aussi à ce plan.
Conclusion : les points A, C, E, G, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ et G_m sont coplanaires.

b. I étant le centre de gravité du triangle EBD, appartient au plan (EBD). De même la droite (EI) appartient à ce plan.
G_m appartient au plan (EBD) s'il est barycentre des trois points E, B et D. Il faut donc que le coefficient de G (dans la définition de G_m soit nul, donc que $m = \dfrac{1}{2}$.
On a donc $\mathrm{G}_{\frac{1}{2}}$ bar $\left\{(\mathrm{E},\ 1),\ (\mathrm{B},\ \frac{1}{2}),\ (\mathrm{D},\ \frac{1}{2})\right\}$ soit le barycentre de $\{(\mathrm{E},\ 1),\ (\mathrm{I},\ 1)\}$ c'est-à- dire en fait le milieu de [EI].
Conclusion G_m appartient à (EI) si et seulement si $m = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

1. On a immédiattement :
A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1).
$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{EB}}\,(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}\,(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$, .
Or $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EB}} = 1-1 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = 1-1 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBD) est donc orthogonal à ce plan.
• L'équation du plan (EBD) orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et contenant le point B(1 ; 0 ; 0) est :
$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{EBD}) \iff 1\times(x-1)+1\times y-0)+1\times(z-0) = 0 \iff x+y+z-1 = 0.$

2. Comme O_2 est le milieu de [EG], $O_2\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.
Comme $\overrightarrow{AG_m}\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$, ces trois nombres étant les coordonnées du point G_m, l'égalité trouvée à la partie A : $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$ se traduit par :
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{m}{2} \\ y & = & \frac{m}{2} \\ z & = & m \end{array}\right.$. Donc $G_m\left(\frac{m}{2}\ ;\ \frac{m}{2}\ ;\ m\right)$. On sait que la distance de G_m au plan est donnée par :
$\dfrac{\left|x_{G_m}+y_{G_m}+z_{G_m}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{\left|\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+m-1\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{3}}$.
On a donc $\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \iff |2m-1| = 1 \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2m-1 & = & 1 \quad \text{ou} \\ 2m-1 & = & -1 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} m & = & 1 \quad \text{ou} \\ m & = & 0 \end{array}\right.$

EXERCICE 3 **11 points**

Partie A : étude d'une fonction

1. **a.** $P(X) = -2\left(X^2-\dfrac{X}{2}\right)+1 = -2\left[X-\dfrac{1}{4}\right]^2+\dfrac{1}{8}+1 = -2\left[X-\dfrac{1}{4}\right]^2+\dfrac{9}{8} = -2\left[\left(X-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}\right] =$
$-2\left(X-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\right)\left(X-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}\right) = -2\left(X+\dfrac{1}{2}\right)(X-1)$.
On sait que $P(X) < 0$ sauf sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ où $P(X) \geqslant 0$, avec $P\left(-\frac{1}{2}\right) = P(1) = 0$.

b. En posant $X = \mathrm{e}^{-x}$, $f(x) = 1+X-2X^2 = P(X)$. Le signe de f est celui de $P(X)$, mais avec $X > 0$.
Donc pour $X \in]0\ ;\ 1[, 0 < X < 1 \iff x > 0,\ f(x) > 0$,
$f(0) = 0$,
pour $X > 1 \iff x < 0, f(x) < 0$.

c. La courbe $\mathscr{C}$ contient donc l'origine.

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Ceci montre que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. On factorise e^{-2x} dans l'écriture de $f(x)$:
$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2\right)$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2 = -2$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et par produit des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4. **a.** f étant la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}+4\mathrm{e}^{-2x}$.

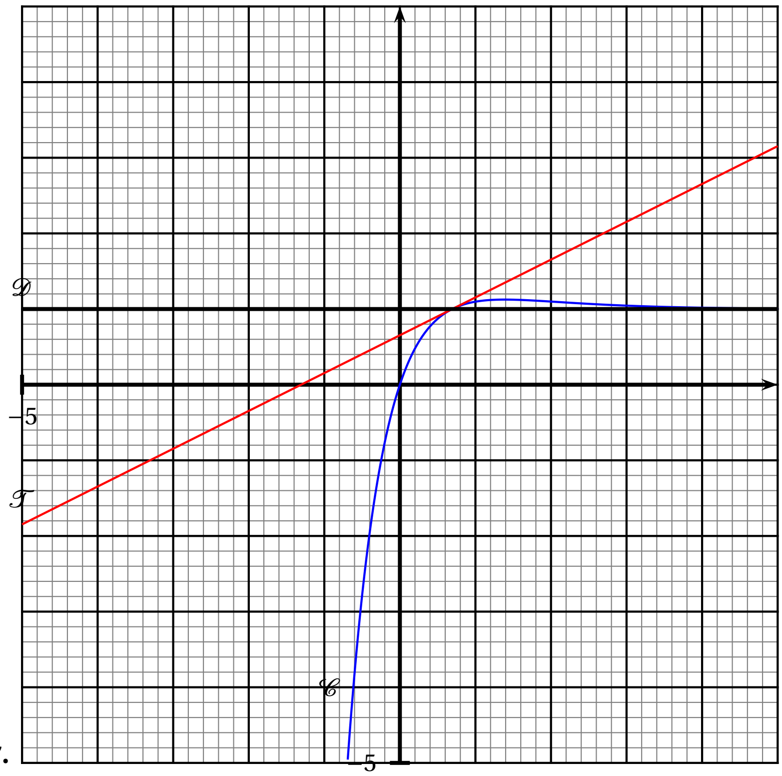
b. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}+4\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}(4-\mathrm{e}^{x})$ et comme $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(4-\mathrm{e}^{x})$.

c. On a $(4-\mathrm{e}^{x}) = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = 4 \iff x = \ln 4 = 2\ln 2$;
$(4-\mathrm{e}^{x}) > 0 \iff \mathrm{e}^{x} < 4 \iff x < 2\ln 2$ par croissance de la fonction ln ;
$(4-\mathrm{e}^{x}) < 0 \iff \mathrm{e}^{x} > 4 \iff x > 2\ln 2$ par croissance de la fonction ln.
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1

5. a. Les abscisses des points communs vérifient $1+\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-2x}=1 \iff \mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-2x}=0 \iff \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{x}-2\right)=0 \iff \mathrm{e}^{x}-2=0 \iff \mathrm{e}^{x}=2 \iff x=\ln 2$.
Donc $\mathrm{A}(\ln 2\ ;\ 1)$.
b. Sur $]-\infty\ ;\ \ln 2[$, $f(x)<1$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite $\mathscr{D}$;
Sur $]\ln 2\ ;\ +\infty[$, $f(x)>1$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite $\mathscr{D}$.

6. Une équation de $\mathscr{T}$ est :
$M(x\ ;\ y)\in\mathscr{T} \iff y-y_{\mathrm{A}}=f'(\ln 2)\left(x-x_{\mathrm{A}}\right) \iff y=1+\dfrac{1}{2}(x-\ln 2)$.

7. 

Partie B : étude d'une suite

1. Cette aire est égale à la différence :
$\mathscr{A}=\ln 2\times 1-\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^{\ln 2}\left(1+\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x=\ln 2-\left[x-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{\ln 2}=$
$\ln 2-\ln 2+\mathrm{e}^{\ln 2}-\mathrm{e}^{-2\ln 2}+0-\mathrm{e}^{-0}+\mathrm{e}^{-2\times 0}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$.

2. a. Quel que soit le naturel $n>0$, $n-1+\ln 2\geqslant \ln 2$ et on a vu que pour $x\geqslant \ln 2$, $f(x)\geqslant 1$.
Donc chaque terme est l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $a<b$: c'est donc un nombre positif.

b. Chaque terme est égal à l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}$, le droite $y = 1$ et les droites verticales d'équations $x = (n-1) + \ln 2$ et $y = n + \ln 2$.

3. **a.** On a vu que pour $x > \ln 2$, la fonction f est décroissante. Donc :
$(n-1) + \ln 2 \leqslant x \leqslant n + \ln 2 \Rightarrow f(n + \ln 2) \leqslant f(x) \leqslant f[(n-1) + \ln 2] \iff$
$f(n + \ln 2) - 1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant f[(n-1) + \ln 2] - 1$.

b. Par intégration des trois fonctions positives sur l'intervalle
$[(n-1) + \ln 2\,;\ n + \ln 2]$
$\displaystyle\int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} [f(n + \ln 2) - 1]\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant$
$\displaystyle\int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} \big(f[(n-1) + \ln 2] - 1\big)\,\mathrm{d}x \iff$
$f(n + \ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f[(n-1) + \ln 2] - 1$.

c. Pour $n \geqslant 2$, on a montré que $f(n+\ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f[(n-1) + \ln 2] - 1$, donc $f(n + 1 + \ln 2) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(n + \ln 2) - 1$, donc par transitivité $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante minorée par zéro : elle est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à zéro.

4. **a.** $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n =$
$\displaystyle\int_{(1-1)+\ln 2}^{1+\ln 2} [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x + \int_{(1)+\ln 2}^{2+\ln 2} [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int_{\ln 2}^{n+\ln 2} [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ en application de la relation de Chasles

b. S_n est donc égale à l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = \ln 2$ et $x = n + \ln 2$.

c. $\displaystyle S_n = \int_{\ln 2}^{n+\ln 2} [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{n+\ln 2} [\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}]\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right]_{\ln 2}^{n+\ln 2} =$
$\displaystyle -\mathrm{e}^{-n-\ln 2} + \mathrm{e}^{-2(n+\ln 2)} + \mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\ln 2} = -\mathrm{e}^{-n} \times \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-2n} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$
$\displaystyle -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2n} + \frac{1}{4}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$