Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** L'affixe de E' est $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$. Mais $-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$. Donc E' a pour affixe $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.
   On sait que $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,donc l'affixe de E' sous forme algébrique est $-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. L'image M' de M par F a pour affixe $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Le point M' est donc le symétrique de M autour de O. Conclusion : l'image de $\mathscr{C}_1$ est le cercle $\mathscr{C}_1$.

2. **a.** L'affixe de K' est $\dfrac{-1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$. Comme ci-dessus $-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$, donc l'affixe de K' est $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   b. K appartient à $\mathscr{C}_2$ qui est l'ensemble des points M d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. L'image M' de M par F a pour affixe $\dfrac{-1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$ soit $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Le point M' est donc comme l'image de M dans l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{4}$. Conclusion : l'image de $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. **a.** On a $z' + 1 = \dfrac{-1}{\overline{z}} + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.
   Ceci entraîne que $|r' + 1| = \left|\dfrac{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - 1}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\right|$. Or $\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,

   $$|r' + 1| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\right| = \dfrac{|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|}{|\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}|} = \dfrac{1}{|\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}|} = \left|\dfrac{-1}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\right|.$$

   D'après la définition de F, $\dfrac{-1}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}$ est l'affixe de l'image du point d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Conclusion : $|r' + 1| = |r'|$.

   b. $r' + 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{B}R'}$ et r' celle du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}R'}$. La relation $|r' + 1| = |r'|$ établie en **a.** signifie que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{B}R'}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{O}R'}\right\|$ donc que l'image R' de R est équidistante des points d'affixes -1 et 0 : R' appartient par conséquent à la médiatrice de [OB].

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $7^1 \equiv 7\ (9)$ $\quad 7^2 \equiv 4\ (9)$ $\quad 7^3 \equiv 1\ (9)$.
   Donc $7^4 \equiv 7\ (9)$ $\quad 7^5 \equiv 4\ (9)$ ...
   Donc si $n \equiv 1\ (3)$ alors $7^n \equiv 7\ (9)$, si $n \equiv 2\ (3)$ alors $7^n \equiv 4\ (9)$ et si $n \equiv 0\ (3)$ alors $7^n \equiv 1\ (9)$.

b. $2005 \equiv 7\ (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7^{2005}\ (9)$.
Or $2005 \equiv 1\ (3)$ donc $7^{2005} \equiv 7\ (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. **a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ (9)$.
Si $n = 1$, alors $10^1 \equiv 1\ (9)$.
Supposons que pour un certain entier p non nul, $(10)^p \equiv 1\ (9)$. Alors $(10)^p \times 10 \equiv 10\ (9)$ donc $(10)^{p+1} \equiv 1\ (9)$.
La propriété est vraie pour $n = 1$, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n non nul.

b. Soit $a_n ; a_{n-1} ; \dots ; a_1 ; a_0$ les chiffres de l'entier naturel N écrit en base dix, avec $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.
$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$.
donc $N \equiv a_n \times 1 + a_{n-1} \times 1 + \dots + a_1 \times 1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv S\ (9)$.

c. N est divisible par 9 $\Leftrightarrow N \equiv 0\ (9) \Leftrightarrow S \equiv 0\ (9) \Leftrightarrow S$ est divisible par 9.

3. **a.** D'après la question 2 (b), $A \equiv B\ (9)$, $B \equiv C\ (9)$, $C \equiv D\ (9)$. Par transitivité de la relation d'équivalence, $A \equiv D\ (9)$.

b. $2005 < 10\,000$ donc $2005^{2005} < 10\,000^{2\,005}$ donc $A < 10^{4 \times 2\,005}$ soit $A < 10^{8\,020}$.
Ceci prouve que que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.
Si chacun des chiffres de A était 9, B vaudrait $9 \times 8\,020 = 72\,180$. Donc $B \leqslant 72\,180$.

c. Comme $B \leqslant 72\,180$, alors B s'écrit en numération décimale avec au plus 5 chiffres.
Si chacun des chiffres de B était 9, C vaudrait $9 \times 5 = 45$. Donc $C \leqslant 45$.

d. Parmis tous les entiers inférieurs ou égaux à 45, celui qui a la plus grande somme de ses chiffres est 39. Donc $D \leqslant 12$.

e. Comme $A \equiv D\ (9)$ d'après la question 3 (a) et $A \equiv 7\ (9)$ d'après la question 1. b., alors $D \equiv 7\ (9)$. Comme $0 < D \leqslant 12$, alors $D = 7$.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0;1]$ on a $x + n \in [n\ ;\ n+1]$. Donc $\dfrac{1}{x+n} \in \left[\dfrac{1}{n+1}\ ;\ \dfrac{1}{n}\right]$.

2. **a.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+n)\Big]_0^1 = \ln(1+n) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b. D'après **1.**

$$\int_0^1 \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$. Soit, d'après **a.**,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \ln\frac{1}{n}.$$

3. $U(n+1) - U(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n]$.
Soit $U(n+1) - U(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
On en déduit d'après **2. b.** que $U(n+1) - U(n) \leqslant 0$: la suite U est décroissante.

4. $V(n+1)-V(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \dfrac{1}{n+1} - [\ln(n+2) - \ln(n+1)]$.

Soit $V(n+1)-V(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

Or il résulte de **2. b.** en remplaçant n par $n+1$ que $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Donc $V(n+1)-V(n) \geqslant 0$: la suite V est croissante.

5. $U(n)-V(n) = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 0$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} (U(n)-V(n)) = 0$.

Les suites U et V sont respectivement décroissante et croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (U(n)-V(n)) = 0$: elles sont donc adjacentes, par conséquent elles convergent et ont la même limite γ.

$|U(n)-V(n)| \leqslant 10^{-2}$ si et seulement si $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant 10^{-2}$, soit si et seulement si $\dfrac{n+1}{n} \leqslant \mathrm{e}^{0,01}$.

Or $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. Donc $|U(n)-V(n)| \leqslant 10^{-2}$ ssi $\dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}^{0,01} - 1$ et par suite si et seulement si $n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{0,01}-1}$.

La calculatrice donne $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0,01}-1} \approx 99,5008\ldots$.

En prenant $n \geqslant 100$ on est sûr que $|U(n)-V(n)| \leqslant 10^{-2}$.

La calculatrice donne $U_{100} \approx 0,582$ et$V_{100} \approx 0,573$. De l'encadrement :

$$0,572 \leqslant \gamma \leqslant 0,583$$

on en déduit que

$$\gamma = 0,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **b**
2. **c**
3. **c**
4. **c**
5. **b**
6. **a**

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

A.] Soit M un point quelconque du plan médiateur de [KL].

I est milieu du segment [KL] donc(MI) est médiane relative au côté [KL] dans le triangle KML.

La droite (MI), droite du plan perpendiculaire à la droite (KL) en I est donc perpendiculaire à (KL). Donc (MI) est médiatrice du côté [KL] du triangle KML.

Dans le triangle KML, (MI) est médiane et médiatrice : ce triangle est donc isocèle de sommet M. Par suite MK = ML.

Le plan médiateur de [KL] apparaît donc bien comme l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

Autre méthode

$MK = ML \iff MK^2 = ML^2 \iff MK^2 - ML^2 = 0 \iff$
$\left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}\right)\left(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ML}\right) = 0 \iff 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{LK} = 0$.

Donc M est équidistant de K et de L si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si M appartient au plan médiateur de [KL].

B.

1. Soit I le milieu de [AB]. Le point M appartient au plan médiateur de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}$.
Comme $\text{I}\left(3;\ 1;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}\ (-2\,;2\,;5)$ et $\text{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$, une équation cartésienne du plan médiateur de [AB] est donc : $-2(x-3)+2(y-1)+5\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=0 \iff$ $-2x+2y+5z+\dfrac{13}{2}=0 \iff 4x-4y-10z-13=0.$

2. Les coordonnées du point commun aux trois plans doivent constituer l'unique solution du système :

$$(S)\begin{cases} 4x-4y-10z-13 & =0\ (1)\\ 2x-10y-6z-7 & =0\ (2)\\ 3x-3y+2z-5 & =0\ (3)\end{cases}$$

On ajoute à l'équation (1) multipliée par 3 l'équation (3) multipliée par -4, pour obtenir :

$$12x-12y-30z-39-12x+12y-8z+20=0 \iff -19=38z \iff z=-\frac{1}{2}.$$

En remplaçant z par cette valeur dans les équations (1) et (2), on obtient le système 2×2 suivant

$$\begin{cases} 4x-4y & =8\\ 2x-10y & =4\end{cases} \iff \begin{cases} x-y & =2\\ x-5y & =2\end{cases}$$

qui donne aussitôt $y=0$ par différence, puis $x=2$.
Conclusion : les coordonnées de E sont : $\left(2\,;0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

3. D'après la partie A :
- $\text{EA}=\text{EB}$ puisque E appartient au plan médiateur de [AB] ;
- $\text{EB}=\text{EC}$ puisque E appartient au plan médiateur de [BC] ;
- $\text{EC}=\text{ED}$ puisque E appartient au plan médiateur de [CD] ;

Donc $\text{EA}=\text{EB}=\text{EC}=\text{ED}$.
Les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre E.
Or $\overrightarrow{EA}\left(2\ ;\ 0\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right)$, donc $\text{EA}^2=4+\dfrac{25}{4}=\dfrac{41}{4}$.
Le rayon de la sphère est donc égal à $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.