

## Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2010

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

Les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre purement pédagogique.

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.  
Dans un tel jeu, il y a 8 piques et 4 as, dont l'as de pique, le nombre de cartes qui ne sont ni des as ni des piques est donc  $32 - (8 + 4 - 1) = 21$ . Comme il y a équiprobabilité sur les 32 cartes, la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est donc égale à :

$$\frac{21}{32} \quad \text{Réponse B}$$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.  
Il y a cette fois-ci équiprobabilité sur les  $\binom{32}{2}$  façons de tirer simultanément 2 cartes parmi 32. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est donc égale à :

$$\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{\frac{21 \times 20}{2 \times 1}}{\frac{32 \times 31}{2 \times 1}} = \frac{105}{248} \quad \text{Réponses A et B}$$

3. La durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$ .  
La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min (soit  $\frac{1}{4}$  h) et 20 min (soit  $\frac{1}{3}$  h) est, d'après le cours :

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 - 0} = \frac{1}{12} \quad \text{Réponse C}$$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15. On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernoulli. Notons  $X$  le nombre d'appareils tombant en panne durant la période de garantie. Alors  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10; 0,15)$ . La probabilité pour qu'exactly 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est donc égale à celle qu'il y ait exactement 1 appareil en panne, soit :

$$p(X = 1) = \binom{10}{1} 0,15^1 \times 0,85^9 = 10 \times 0,15 \times 0,85^9 \approx 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Réponses A et D.

### EXERCICE 2

5 points

#### Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.

#### 1. Restitution organisée de connaissances

- a. La relation (1) se traduit par  $|z' - \omega| = |z - \omega|$ , ou encore  $\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1$ .

La relation (2) se traduit par :  $\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \pmod{2\pi}$ .

b. Le nombre complexe  $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$  a pour module 1 et pour argument  $\theta$ , on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que :  $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ .  
On en déduit alors que  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  d'où :  $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ .

2. L'équation :  $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$  a pour discriminant  $\Delta = -16 < 0$ . Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

3. a. On a  $b = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ . On en déduit que  $a = \overline{b} = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

b. Voir figure 1.

c. Comme  $a$  et  $b$  sont conjugués, les points  $A$  et  $B$  sont symétriques par rapport à l'axe réel et l'on a donc  $OA = OB = |a| = 4$ .

Par ailleurs  $AB = |2\sqrt{3} + 2i - (2\sqrt{3} - 2i)| = |4i| = 4$ .

Ainsi  $OA = OB = AB$ , le triangle  $OAB$  est donc équilatéral.

4. D'après la question 1 :  $d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(c - 0) + 0 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-8i) = 4\sqrt{3} + 4i$ .

5. On constate que  $d = 2b$ , autrement dit :  $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$ , ce qui signifie que  $D$  est l'image de  $B$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 2.

6.  $OB = AB$  car le triangle  $OAB$  est équilatéral; de même  $BD = OB$  car  $B$  est le milieu de  $[OD]$  (puisque  $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$ ). On a donc  $BO = BA = BD$  et les points  $O, B$  et  $D$  sont alignés, donc le point  $A$  appartient au cercle de diamètre  $[OD]$  (et de centre  $B$ ). Le triangle  $OAD$  est donc rectangle en  $A$ .

Autre méthode :

$$\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AD}\right) = \arg\left(\frac{d - a}{-a}\right) = \arg\left(\frac{2\sqrt{3} + 6i}{-2\sqrt{3} + 2i}\right) = \arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

## EXERCICE 2

5 points

### Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit  $s$  une similitude indirecte d'écriture complexe  $z' = a\overline{z} + b$ . Soit  $C$  un point d'affixe  $c$ ,  $D$  et  $E$  deux points d'affixes respectives  $d$  et  $e$ , distincts de  $C$ . Soient  $C' = s(C)$ ,  $D' = s(D)$ , et  $E' = s(E)$ . Notons  $c'$ ,  $d'$  et  $e'$  les affixes respectives des points  $C'$ ,  $D'$  et  $E'$ . Alors (modulo  $2\pi$ ) :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{C'E'}\right) &= \arg\left(\frac{e' - c'}{d' - c'}\right) \text{ d'après la prop. 2} \\ &= \arg\left(\frac{a\overline{e} + b - a\overline{c} - b}{a\overline{d} + b - a\overline{c} - b}\right) \text{ d'après la prop. 1} \\ &= \arg\left(\frac{a(\overline{e} - \overline{c})}{a(\overline{d} - \overline{c})}\right) \\ &= \arg\left(\frac{e - c}{d - c}\right) \\ &= -\arg\left(\frac{e - c}{d - c}\right) \\ &= -\left(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CE}\right). \end{aligned}$$

Une similitude indirecte transforme donc un angle orienté en son opposé.

2. a. Voir figure 2.  
 b.  $\mathcal{S}_1$  est la symétrie d'axe  $(O; \vec{u})$ , son expression complexe est  $z' = \bar{z}$ .  
 3. a.  $\mathcal{S}_2$  est une similitude directe, son écriture complexe est donc de la forme  $z' = az + b$ , avec  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ . De plus  $C' = \mathcal{S}_2(C_1)$  et  $D' = \mathcal{S}_2(D_1)$  donc :

$$\begin{cases} 1 + 4i = 3a + b & L_1 \\ -2 + 2i = a(1 + 3i) + b & L_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$  donne :  $3 + 2i = a(2 - 3i)$ , d'où  $a = \frac{3 + 2i}{2 - 3i} = \frac{i(2 - 3i)}{2 - 3i} = i$ . En remplaçant  $a$  par  $i$  dans  $L_1$  on a alors :  $1 + 4i = 3i + b$  d'où  $b = 1 + i$ . L'écriture complexe de  $\mathcal{S}_2$  est donc :  $z' = iz + 1 + i$ .

- b. La similitude directe  $\mathcal{S}_2$  a pour :  
 - rapport :  $k = |i| = 1$  ;  
 - angle  $\alpha = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$  ;  
 - centre le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  telle que :  $\omega = \frac{1+i}{1-i} = i$ .  
 (on peut remarquer que  $\mathcal{S}_2$  n'est rien d'autre que le quart de tour direct de centre  $\Omega$ ).  
 4. Soit  $M$  un point quelconque d'affixe  $z$ ,  $M_1 = \mathcal{S}_1(M)$  d'affixe  $z_1$  et  $M' = \mathcal{S}_2(M_1)$  d'affixe  $z'$ .  
 D'après les questions précédentes :  $z_1 = \bar{z}$  et  $z' = iz_1 + 1 + i = i\bar{z} + 1 + i$ .  
 L'expression complexe de  $\mathcal{S}$  est donc :  $z' = i\bar{z} + 1 + i$ .

- a.  $\mathcal{S}(C) = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1(C) = \mathcal{S}_2(C_1) = C'$ .  
 De même,  $\mathcal{S}(D) = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1(D) = \mathcal{S}_2(D_1) = D'$ .  
 b.  $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$  et  $d \neq c$  donc :  $\frac{h-c}{d-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ .  
 On en déduit que :  
 $(\vec{CD}; \vec{CH}) = \arg\left(\frac{h-c}{d-c}\right) = \frac{\pi}{3}$  et que :  $\frac{HC}{DC} = \left|\frac{h-c}{d-c}\right| = 1$  donc  $DC = HC$ .  
 Le triangle  $CDH$  est donc équilatéral direct.  
 c.  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ , or  $\mathcal{S}_1$  est une similitude indirecte et  $\mathcal{S}_2$  est une similitude directe, donc  $\mathcal{S}$  est une similitude indirecte. Par ailleurs, dans cette similitude indirecte  $\mathcal{S}$ , le triangle équilatéral direct  $CDH$  a pour image  $C'D'H'$ . Ce dernier triangle est donc équilatéral indirect.

## EXERCICE 3

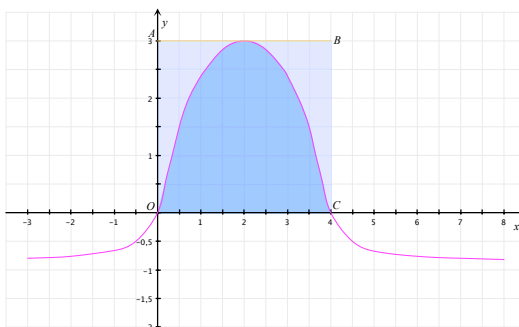
4 points

Commun à tous les candidats

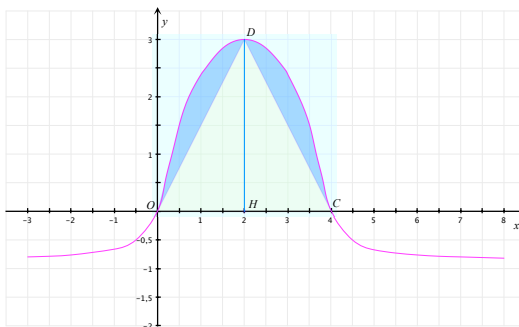
On définit la fonction  $F$  sur  $I$ , par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

1. a.  $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ .  
 b. - Soit  $x \in [0; 4]$ . Sur l'intervalle  $[0; x]$  la fonction  $f$  est positive donc, comme  $0 \leq x$ , d'après le cours :  $\int_0^x f(t) dt \geq 0$ , c'est-à-dire  $F(x) \geq 0$ .  
 - Soit  $x \in [-3; 0]$ . Sur l'intervalle  $[x; 0]$  la fonction  $f$  est négative donc, comme  $x \leq 0$ , on a :  $\int_x^0 f(t) dt \leq 0$  d'où :  $-\int_0^x f(t) dt \leq 0$ .  
 On a donc :  $\int_0^x f(t) dt \geq 0$ , autrement dit  $F(x) \geq 0$ .  
 c. Sur l'intervalle  $[0; 4]$ , la fonction  $f$  est positive, l'intégrale  $\int_0^4 f(t) dt$  représente donc l'aire de la portion du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de  $f$  et les droites verticales d'équations

respectives  $x = 0$  et  $x = 4$  (en bleu sur la figure ci-dessous).  
 Par ailleurs, cette aire est inférieure à l'aire (mauve) du rectangle  $OABC$ ,  
 autrement dit :  $F(4) \leq OA \times AB$ , c'est-à-dire :  $F(4) \leq 12$ .



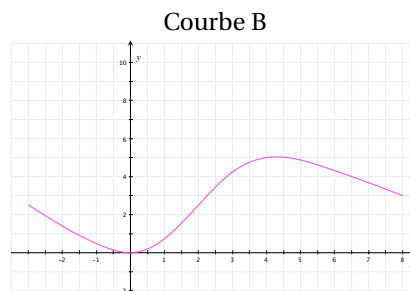
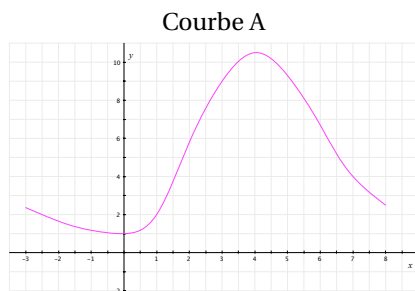
De même, l'aire  $F(4)$  est supérieure à celle du triangle  $ODC$  de hauteur  $[DH]$  (en jaune sur la figure ci-dessous) donc  $F(4) \geq \frac{1}{2} \times DH \times OC$ , c'est-à-dire  $F(4) \geq 6$ .



2. a. Soit  $x \in I$ . La fonction  $f$  est continue sur  $I$ , donc  $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$  représente la primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en 0.
- b. D'après ce qui précède, la fonction  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F'(x) = f(x)$ . Le signe de  $f(x)$  s'obtient par lecture graphique. On peut donc dresser le tableau de variation de  $F$  :

$x$	-3	0	4	8	
Signe de $F'(x) = f(x)$	-	0	+	0	-
Variation de $f$	↘		↗		↘
	$F(-3)$		0	$F(8)$	

3. On dispose de deux représentations graphiques sur  $I$ .



Les variations des courbes A et B sont en accord avec le tableau de variation précédent, cependant :

- La courbe A ne peut représenter la fonction  $F$  puisqu'on doit avoir  $F(0) = 0$  ce qui n'est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.
- La courbe B ne peut représenter la fonction  $F$  puisqu'on doit avoir  $6 \leq F(4) \leq 12$  ce qui n'est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats****Partie A****1. Limite en 0.**

D'après le théorème des croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ , donc, par opérations sur les limites :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

**Limite en  $+\infty$ .**

On peut écrire, pour tout réel  $x > 0$  :  $g(x) = x(1 - \ln x)$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ , donc, par produit des limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

2. La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout  $x > 0$  :

$$g'(x) = 1 - \left( \ln x + x \times \frac{1}{x} \right) = -\ln x.$$

3. Soit  $x > 0$ , on sait que  $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$  ; d'où le tableau de variations de  $g$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g$		1	$-\infty$

$\swarrow$        $\searrow$   
 0                       $-\infty$

**Partie B**

1. À l'aide de la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_n$	2,718	1,847	0,744	0,213	0,047	00 865	0,001 78	0,000 178	0,000 002

On peut donc conjecturer que :

- a. la suite  $(u_n)$  est décroissante ;
  - b. la suite  $(u_n)$  converge vers 0.
2. a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln(e^n) - \ln(n^n) = n \ln e - n \ln n = n - \ln n = g(n).$$

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $1 \leq n < n+1$ , et comme la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ , alors :  $g(1) \geq g(n) > g(n+1)$  ce qui équivaut à  $1 \geq v_n > v_{n+1}$ . Ceci prouve que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
  - c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \ln(u_n)$ , donc  $u_n = e^{v_n}$ . De plus, d'après la question précédente,  $v_n > v_{n+1}$ , donc par application de la fonction exponentielle (strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ) :  $e^{v_n} > e^{v_{n+1}}$ , c'est-à-dire  $u_n > u_{n+1}$  et la suite  $(u_n)$  est donc décroissante.
3. La suite  $(u_n)$  est positive de façon évidente, elle est donc minorée.  
 La suite  $(u_n)$  est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme  $u_1 = e$ .  
 La suite  $(u_n)$  est donc bornée.

4. La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = e^{v_n} = e^{g(n)}$ .

D'après la partie A,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ , donc, par composition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{g(n)} = 0$ , ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  a pour limite 0.

FIGURE 1 – Exercice 2 (non-spé)

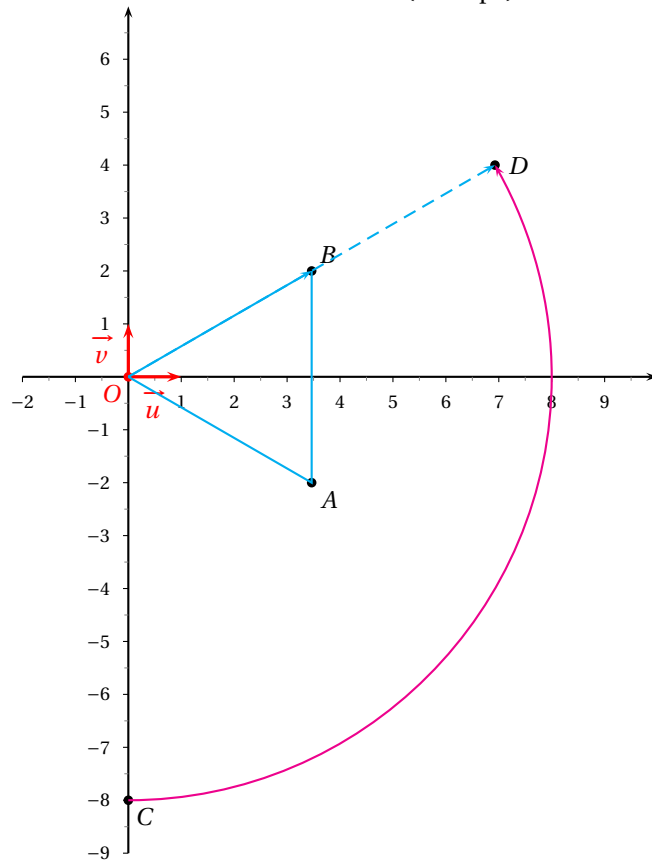


FIGURE 2 – Exercice 2 (spé)

