Corrigé du baccalauréat S Liban 3 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

ROC : On suppose connus les résultats : $\mathrm{e}^0 = 1$ et pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$.

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
2. Pour tout réel x, on démontre par récurrence la propriété $P(n)$: $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.
   - $(\mathrm{e}^x)^0 = 1 = \mathrm{e}^{0\times x}$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Soit n, un entier, on démontre que la propriété se transmet de n à $n+1$. On suppose que $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ alors $(\mathrm{e}^x)^{n+1} = (\mathrm{e}^x)^n \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{nx+x} = \mathrm{e}^{(n+1)x}$.
   - La propriété est vraie pour $n = 0$ et se transmet, pour tout n, de n à $n+1$, donc la propriété est vraie pour tout n : pour tout entier naturel n, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

   Par linéarité de l'intégrale, $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$.

   b. $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, on remarque que $f = -\dfrac{u'}{u}$ où $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x} > 0$. f a pour primitive $F = -\ln(u)$.

   $u_1 = [-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})]_0^1 = \ln(2) - \ln(1+\mathrm{e}^{-1})$.

   D'après la question 1.a., $u_0 = 1-u_1 = 1-\ln(2)+\ln(1+\mathrm{e}^{-1}) = \ln(\mathrm{e}+1)-\ln(2)$
2. Pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $1+\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} > 0$. L'intégrale sur l'intervalle $[0 ; 1]$ d'une fonction positive est positive donc u_n est positive ou nulle.
3. **a.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

   $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}+\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}(\mathrm{e}^{-x}+1)}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

   $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$

   b. Pour tout entier naturel n, d'après la question 2., $u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$ or, d'après la question 3., $u_n = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} - u_{n+1}$ donc $u_n \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.
4. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0$ (car e^{-n} tend vers 0 ainsi que $\dfrac{1}{n}$). Selon le théorème des gendarmes, la suite u_n converge aussi vers zéro.

EXERCICE 2 **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On note (D) la droite passant par les points A$(1 ; -2 ; -1)$ et B$(3 ; -5 ; -2)$.

1. La droite (D) passe par A(1 ; −2 ; −1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2\,;\,-3\,;\,-1)$.
Elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+2t \\ y &=& -2-3t \\ z &=& -1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-k \\ y &=& 1+2k \\ z &=& k \end{array}\right. \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$

La droite (D′) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;\,2\,;\,1)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc les droites (D) et (D′) ne sont pas parallèles.
Les droites (D) et (D′) ont un point en commun si et seulement si il existe deux réels t et k tels que $\left\{\begin{array}{rcrl} 1+2t &=& 2-k & (l_1) \\ -2-3t &=& 1+2k & (l_2) \\ -1-t &=& k & (l_3) \end{array}\right.$. Or $(l_1)+(l_2)-(l_3) \iff 0=3$ (impossible). Les trois équations sont incompatibles et les droites n'ont pas de point commun. Les droites (D) et (D′) ne sont ni sécantes ni parallèles, elles sont donc non coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.

a. Pour tout réel t, on a $4(1+2t)+(-2-3t)+5(-1-t)+3=0$, donc tout point de (D) appartient au plan (P). La droite (D) est donc incluse dans le plan (P).

b. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{P})\cap(\text{D}') \iff$ il existe un réel k tel que

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x &=& 2-k & \\ y &=& 1+2k & \\ z &=& k & \\ 4x+y+5z+3 &=& 0 & (\text{e}) \end{array}\right.$$

$(e) \iff 4(2-k)+(1+2k)+5k+3=0 \iff k=-4$

$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{P})\cap(\text{D}' \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2+4 &=& 6 \\ y &=& 1-8 &=& -7 \\ z &=& -4 &=& -4 \end{array}\right.$ Le point C a pour coordonnées (6 ; −7 ; −4).

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$.

a. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = (-1)\times(1)+(2)\times(1)+(1)\times(-1)=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ directeurs de (Δ) et (D′) sont orthogonaux. Les deux droites sont donc orthogonales. Elles possèdent le point C en commun, elles sont donc perpendiculaires

b. De même, $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ donc les droites (Δ) et (D) sont orthogonales. La droite (Δ) a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6+\lambda \\ y &=& -7+\lambda \\ z &=& -4-\lambda \end{array}\right. \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Les droites (D) et Δ) ont un point en commun si et seulement si il existe deux réels t et λ tels que $(s)\left\{\begin{array}{rcr} 1+2t &=& 6+\lambda \\ -2-3t &=& -7+\lambda) \\ -1-t &=& -4-\lambda \end{array}\right.$

$$s \iff \left\{\begin{array}{lcll} 2t-\lambda &=& 5 & (l_1)\\ 3t+\lambda &=& 5 & (l_2)\\ t-\lambda &=& 3 & (l_3)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} 2t-\lambda &=& 5 & (l_1)\\ 5t &=& 10 & (l_2+l_1)\\ -t &=& -2 & (l_3-l_1)\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda &=& -1\\ t &=& 2\end{array}\right.$$

Les deux droites se coupent perpendiculairement en un point E$(x\,;\,y\,;\,z)$

tel que $\left\{\begin{array}{lcccccc} x &=& 1+4 &=& 6-1 &=& 5\\ y &=& -2-6 &=& -7-1 &=& -8\\ z &=& -1-2 &=& -4+1 &=& -3\end{array}\right.$.

Le point E a pour coordonnées $(5\,;\,-8\,;\,-3)$.

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement obligatoire

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$. » **FAUX**

   Il s'agit d'un schéma de Bernoulli : on renouvelle 10 fois de manière indépendante une expérience à deux issues consistant à tirer un boule dans une urne contenant 3 boules dont une blanche. La probabilité de tirer une blanche est de 1/3. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues à l'issue des 10 expériences. X suit une loi binomiale de paramètres $(10;1/3)$. $p(X=3)=\binom{10}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$ et $\binom{10}{3}\neq 3$.

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(\lambda>0)$.

   On rappelle que pour tout réel $a>0$: $p(X\leqslant a)=\displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X>a)=p(X\leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. » **VRAI**

   Pour tout réel $a>0$: $p(X\leqslant a)=\displaystyle\int_0^a \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^a=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$,

   $p(X>a)=1-p(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$.

   L'équation $p(X>a)=p(X\leqslant a)$ est équivalente à :

   $1-\mathrm{e}^{-\lambda a}=\mathrm{e}^{-\lambda a}\iff \mathrm{e}^{-\lambda a}=\frac{1}{2}\iff -\lambda a=-\ln(2)\iff a=\frac{\ln(2)}{\lambda}$

3. Soit le nombre complexe $z=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »**VRAI**

   On utilise la forme exponentielle : $z=1-\mathrm{i}\sqrt{3}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $r=\sqrt{1+3}=2$ et θ est tel que $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=-\frac{\pi}{3}$. Donc $z=2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ et pour tout entier naturel n, $z^n=2^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$. Si n est multiple de 3, il s'écrit sous la forme $3k$ où k est un entier naturel. On obtient alors $z^n=2^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}=\pm 2^n\in\mathbb{R}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, le point A d'affixe $a=2-\mathrm{i}$ et le point B d'affixe $b=\frac{1+\mathrm{i}}{2}a$.

Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. » **VRAI**
Soit $Z = \dfrac{a-b}{-b}$, on sait que $Arg(Z) = (\overrightarrow{\text{BO}}, \overrightarrow{\text{BA}})$ et que $|Z| = \dfrac{\text{BA}}{\text{BO}}$.
$b = \dfrac{1+\text{i}}{2}(2-\text{i}) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$, donc $a - b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i} = \text{i}(-\dfrac{1}{2}\text{i} - \dfrac{3}{2}\text{i}) = -\text{i}b$.
$Z = \dfrac{-\text{i}b}{-b} = \text{i}$ est de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Donc $(\overrightarrow{\text{BO}}, \overrightarrow{\text{BA}}) = \dfrac{\pi}{2}$ et BA = BO.
Le triangle ABO est donc isocèle rectangle de sommet B.

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.
Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »
FAUX
Pour tout point M d'affixe z non nulle, $z' = \dfrac{-10}{\overline{z}} = \dfrac{-10z}{z\overline{z}}$. Or $\dfrac{-10}{z\overline{z}}$ est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{OM'}}$ sont colinéaires et les points O, M et M' sont alignés.

EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, le point A d'affixe 2 − i et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On note I le milieu du segment [AB].
Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1+\text{i})z - 1 - 2\text{i}$. » **VRAI**
Puisque B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, le triangle OAB est rectangle isocèle direct de sommet O. Or I est le milieu de l'hypoténuse donc $\dfrac{\text{AO}}{\text{AI}} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{\text{AI}}, \overrightarrow{\text{AO}}) = \dfrac{\pi}{4}$. La similitude de centre A qui transforme I en O a pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\dfrac{\pi}{4}$. Son expression complexe est $z' = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\pi/4}(z - z_A) + z_A = (1+\text{i})(z - 2 + \text{i}) + 2 - \text{i} = (1+\text{i})z - 2 - 2\text{i} + \text{i} - 1 + 2 - \text{i} = (1+\text{i})z - 1 - 2\text{i}$

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(e) : 3x - 5y = 2$.
Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1\,;\,3k - 1)$ où k est un entier relatif. » **VRAI**
Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers vérifiant (e). Alors $3x - 5y = -3 + 5$ donc (e') : $3(x+1) = 5(y+1)$. Le nombre 5 divise $3(x+1)$ et 5 est premier avec 3. Selon le théorème de Gauss, 5 divise $x+1$ et il existe un entier relatif k tel que $x+1 = 5k$ donc $x = -1 + 5k$ puis en remplaçant dans (e'), $5(y+1) = 15k$ donc $y = 3k - 1$.
On en déduit que, si $(x\,;\,y)$ est solution de (e) alors il existe un entier relatif k tel que $(x\,;\,y) = (-1 + 5k\,;\,-1 + 3k)$.
Réciproquement, s'il existe un entier relatif k tel que $(x\,;\,y) = (-1 + 5k\,;\,-1 + 3k)$, le couple $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs vérifiant (e). En effet, $3 \times (-1 + 5k) - 5 \times (-1 + 3k) = 2$.

L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1\ ;\ 3k-1)$ où k est un entier relatif.

3. On considère l'équation (E) : $x^2+y^2 \equiv 0 \quad$ modulo 3, où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   Proposition 3 : « Il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. » **FAUX**

   On construit le tableau des congruences modulo 3 de x et de x^2 :

x	0	1	2
x^2	0	1	$4 \equiv 1$

   Si x ou y n'est pas multiple de 3 alors x^2 ou y^2 est congru à 1 modulo 3 et la somme x^2+y^2 est congrue à 1 ou 2 modulo 3 et n'est jamais congrue à 0 modulo 3.

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, le nombre $n!+k$ n'est pas un nombre premier. » **VRAI**

   Pour tout entier naturel k tel que $2 \leq k \leq n$ on sait que k divise $n!$ donc, par divisibilité de la somme, k divise aussi $n!+k$, k est donc un diviseur de $n!+k$ et k est différent de 1 $(k \geqslant 2)$ et différent de $k+n!$ (car $n!$ est non nul), k est donc un diviseur propre de $k+n!$ qui n'est donc pas premier.

5. On considère l'équation (E$'$) : $x^2-52x+480=0$, où x est un entier naturel.

   Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E$'$). »**FAUX**

   Les solutions de cette équation du second degré sont 12 et 40. Il n'existe aucun couple d'entiers naturels tels que le PGCD et le PPCM correspondent respectivement à 12 et 40 - en effet le PGCD de deux nombres divise toujours le PPCM de ces deux nombres et 12 ne divise pas 40.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2-2+\ln x.$$

1. La fonction u est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x strictement positif, $u'(x) = 2x+\dfrac{1}{x}$. Pour tout réel x strictement positif, $u'(x) > 0$ comme somme de termes positifs (dont l'un est non nul), la fonction u est donc strictement croissante.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to 0} x^2-2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$.

2. **a.** La fonction u est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle prend des valeurs positives (car $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$) et des valeurs négatives (car $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$), selon le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction u s'annule au moins une fois. Comme de plus, la fonction est strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois. Donc l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice on remarque que $u(1,31) < 0 < u(1,32)$ donc $1,31 < \alpha < 1,32$

3. Puisque u est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, pour tout $x \in]0\ ;\ \alpha[$, $u(x) < u(\alpha)$ donc $u(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $u(x) > u(\alpha)$ donc $u(x) > 0$

4. $u(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0~;~+\infty[$.

1. Pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 2x + 2\times(2 - \ln x)\times\dfrac{-1}{x} = \dfrac{2}{x}(x^2 - 2 + \ln x) = \dfrac{2}{x}u(x)$

2. $\dfrac{2}{x}$ étant toujours positif sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, donc est strictement négative sur $]0~;~\alpha[$, et strictement positive sur $]\alpha~;~+\infty[$ et s'annule en α. la fonction f est strictement décroissante sur $]0~;~\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha~;~+\infty[$ et atteint un minimum en α.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2 - \ln x)^2 = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 02$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2 - \ln x)^2 = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

1. Le point A a pour coordonnées (0 ; 2) et le point $M(x~;~\ln x)$, donc
$\text{A}M = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}$

2. Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a. La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante sur son ensemble de définition, et la fonction f prenant des valeurs toujours positives, les fonctions f et $g = \sqrt{f}$ ont même sens de variation.

b. La fonction g atteint donc son minimum en α. La distance AM est donc minimale pour $x = \alpha$ soit au point $\text{P}(\alpha~;~\ln\alpha)$. Or $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ donc P a pour coordonnées $(\alpha~;~2 - \alpha^2)$.

c. $\text{AP} = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ (car $\alpha > 0$).

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La tangente à Γ en P a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$ et la droite AP a pour coefficient directeur $\dfrac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \dfrac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} = -\alpha$. Le produit des deux coefficients directeurs donne -1, la tangente Γ en P et la droite (AP) sont perpendiculaires.