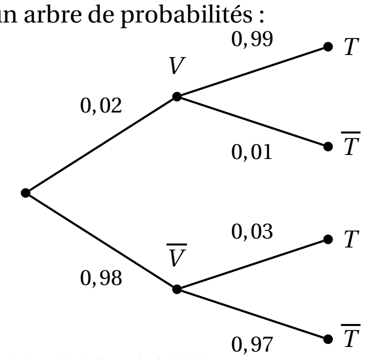
∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole 21 juin 2011 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. **a.** D'après l'énoncé, on a : $P(V)0,02$; $P_V(T)=0,99$; $P_{\overline{V}}(\overline{T})=0,97$.
Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



b. $P(V\cap T)=P_V(T)\times P(V)=0,99\times 0,02=0,0198$

2. Par conséquent : $P(V)=P(V\cap T)+P\left(V\cap\overline{T}\right)=P_T(V)\times p(T)+P_{\overline{V}}(T)\times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles).
Alors : $P(T)=0,99\times 0,02+0,03\times 0,98=0,0492$.

3. **a.** Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V)=\dfrac{P(V\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,0198}{0,0492}\approx 0,402$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

b. La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(T)}\left(\overline{V}\right)=\dfrac{P\left(\overline{V}\cap\overline{T}\right)}{P(\overline{T})}=\dfrac{0,97\times 0,98}{1-0,0492}\approx 0,9997$, c'est-à-dire environ 99,97%.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,02)$.

2. Pour tout k, $(0\leqslant k\leqslant 10)$, on a $P(X=k)=\dbinom{10}{k}\times 0,02^k\times(1-0,02)^{10-k}$.
Alors : $P(X\geqslant 2)=1-(P(X<2))=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-\left[0,98^{10}+10\times 0,02\times 0,98^9\right]\approx 0,016$

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Erreur dans l'énoncé : la question 2 a deux réponses exactes

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_\text{A}=1$, $z_\text{B}=\text{i}$, $z_\text{C}=-1$, $z_\text{D}=-\text{i}$.

1. L'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est $z'=\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(z-1)+1$, donc
$z'=\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-1)+1$.
On en déduit $z_E=\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\text{i}-1)+1=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1-\text{i})$ (réponse 2).

2. $|z+\text{i}| = |z-1| \Leftrightarrow |z-z_{\text{D}}| = |z-z_{\text{A}}| \Leftrightarrow \text{D}M = \text{A}M$ si M est le point d'affixe z. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AD].
Comme ABCD est de manière évidente un carré, c'est aussi la médiatrice du segment [BC]. (réponses 1 et 4)

3. On doit avoir $z \neq -1$.
$\dfrac{z+\text{i}}{z+1} \in \text{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z+\text{i}}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC}\ ;\ \overrightarrow{MD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. On obtient le cercle de diamètre [CD], privé de C. (réponse 2)

Méthode analytique : $\dfrac{z+\text{i}}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+\text{i}}{z+1}\right) + \overline{\left(\dfrac{z+\text{i}}{z+1}\right)} = 0 \Rightarrow \dfrac{z+\text{i}}{z+1} + \dfrac{\overline{z}-\text{i}}{\overline{z}+1} = 0$

$\Rightarrow (z+\text{i})(\overline{z}+1) + (z+1)(\overline{z}-\text{i}) = 0$ (avec $z \neq -1$)

$\Rightarrow 2z\overline{z} + (z+\overline{z}) - \text{i}(z-\overline{z}) = 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2) + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y = 0$
$\Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ (et $z \neq -1$).

Le centre du cercle Ω a donc pour affixe $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\text{i}}{2}$ et le rayon vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Son diamètre a donc une longueur égale à $\sqrt{2}$ et son centre Ω est le milieu de [CD] car son affixe est la demi-somme des affixes de C et de D. Mais CD $= |z_{\overrightarrow{CD}}| = |-\text{i}+1| = \sqrt{2}$, on déduit que ce cercle est celui de diamètre [CD].
L'ensemble cherché est donc ce cercle auquel on enlève le point C dont l'affixe annule le dénominateur $(z+1)$.

4. $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{BM}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
$\arg(z-\text{i})$ n'existe que si $z \neq \text{i}$, donc $M \neq \text{B}$.
On obtient la demi-droite]BD]. (réponse 3)

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. **a.** $f_1(x) = x\text{e}^{-x} = \dfrac{x}{\text{e}^x}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \text{e}^X = +\infty$, d'où, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

D'après le cours (croissances comparées), $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\text{e}^x} = 0$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

b. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 1 \times \text{e}^{-x} + x \times \left(-\text{e}^{-x}\right) = (1-x)\text{e}^{-x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de 1-x, donc positif pour $x \leqslant 1$ et nulle pour $x = 1$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\text{e}}$	$\searrow$	0

c. On sait que $k \geqslant 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$, ce qui n'est pas le cas pour f_k d'après le graphique, donc $k \neq 1$, c'est-à-dire $k \geqslant 2$.

2. **a.** Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n(0) = 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$ et $f_n(1) = 1^n\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par l'origine et le point de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} + x^n \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$

3. $f_3'(x) = x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}$, qui s'annule en $x = 3$ et est du signe de $3-x$, donc positif pour $x \leqslant 3$ et négatif pour $x \geqslant 3$.
La fonction f_3 admet donc bien un maximum en 3.

4. **a.** L'équation de la tangente T_k est : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$, donc $y = \dfrac{k-1}{\mathrm{e}}(x-1) + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ soit $y = \dfrac{(k-1)x - k + 2}{\mathrm{e}}$.

$y = 0$ pour $x = \dfrac{k-2}{k-1}$.

b. On sait que T_k coupe l'axe des abscisses en $\dfrac{4}{5}$. On résout donc l'équation $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5}$. On obtient $5(k-2) = 4(k-1)$, d'où $k = 6$.

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.

u et v sont dérivables, u' et v' sont continues. On peut effectuer une intégration par parties.

$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

2. **a.** Sur $[0\,;\,1]$, f_n est continue et positive, donc I_n représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, la courbe $\mathscr{C}_n$ et l'axe des abscisses. On voit sur le graphique que ces aires semblent décroissantes, donc la suite (I_n) semble décroissante.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{d}x} = \int_0^1 [x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x}]\,\mathrm{d}x$ (par linéarité)

$= \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[0\,;\,1]$, $x^n \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ donc $x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$. On intègre sur $[0\,;\,1]$ une fonction continue négative, donc le résultat est un nombre négatif (positivité de l'intégrale).
On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ donc la suite (I_n) est décroissante.

c. Il est évident que $I_n \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive). La suite (I_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente vers un rééel ℓ.

d. Montrons que $\ell = 0$.

Première méthode : sur $[0\,;\,1]$, $x \longmapsto -x$ est décroissante, donc par composition avec exp, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante, donc $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$.
Sur $[0\,;\,1]$, $f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$, donc par propriété de l'intégration,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème de gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Deuxième méthode : On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\text{e}^{-x}\,\text{d}x = \int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x)\,\text{d}x$ avec $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \text{e}^{-x}\end{array}\right.$

d'où $\left\{\begin{array}{l} u'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -\text{e}^{-x}\end{array}\right.$

u'_{n+1} et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On obtient : $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\text{e}^{-x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 x^n\text{e}^{-x}\,\text{d}x = -\frac{1}{\text{e}} + (n+1)I_n$.

On en déduit : $\dfrac{I_{n+1}}{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)\text{e}} + I_n$.

Si ℓ est la limite de I_n à l'infini, par passage à la limite, on obtient : $0 = 0 + \ell$ donc $\ell = 0$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A – Restitution organisée de connaissances

1. $\overrightarrow{n}$ et M_0H sont colinéaires, donc :
$\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|\left|\left|\overrightarrow{n}\right|\right| \times \left|\left|\overrightarrow{M_0H}\right|\right|\right| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ car $\left|\left|\overrightarrow{n}\right|\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $M_0H\begin{pmatrix} x_H - x_0\\ y_H - y_0\\ z_H - z_0\end{pmatrix}$ donc
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b\left(y_H - y_0\right) + c(z_H - z_0)$
$= ax_H + by_H + cz_H - ax_0 - by_0 - cz_0 = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$ car $H \in \mathscr{P}$, donc
$ax_H + by_H + cz_H + d = 0$.

3. On en déduit : $M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d\right|$ d'où $d(M_0\,;\,\mathscr{P}) = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (−3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (−7 ; 0 ; 4).

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

   Il est clair que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc le trois points A, B et C définissent un plan.

   Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation $x+2y-z-1 = 0$ donc les trois points A, B et C appartiennent à ce plan d'équation $x+2y-z-1 = 0$. Comme ces trois points définissent un plan, ce plan a pour équation $x+2y-z-1 = 0$.

   b. La distance d du point F au plan $\mathscr{P}$ est : $\dfrac{|-7+2\times 0-4-1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$.

2. On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

   a. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur directeur de Δ.

   Une représentation paramétrique de Δ est donc : $\left\{\begin{array}{l} x = x_F + 1\times t\\ y = y_F + 2\times t\\ z = z_F + (-1)\times t\end{array}\right.$ d'où : $\left\{\begin{array}{l} x = -7+t\\ y = 0+2t\\ z = 4-t\end{array}\right.$

   b. H appartient à Δ et à $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de Δ ainsi que l'équation de $\mathscr{P}$.

   On doit donc avoir : $\left\{\begin{array}{l} x = -7+t\\ y = 2t\\ z = 4-t\\ x+2y-z-1 = 0\end{array}\right.$.

On en déduit : $-7+t+2(2t)-4+t-1=0$ d'où $6t-12=0$ d'où $t=2$.
On en déduit que les coordonnées de H sont : $(-5~;~4~;~2)$

c. La distance $d(F~;~\mathscr{P})$ est égale alors à FH.
Or : $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ d'où $\text{FH}=\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.
On retrouve le même résultat.

3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

a. $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\text{FB}=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=\sqrt{36}=6$ (rayon de la sphère) donc B appartient à la sphère.

b. Il est clair que le centre de la sphère est H.
Soit r le rayon de $\mathscr{C}$. D'après le théorème de Pythagore, on a : $r^2+(2\sqrt{6})^2=6^2$ donc $r^2=36-24=12$, d'où : $r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

1. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$.
En multipliant par c, on obtient $auc+bcv=c$.
On suppose que a divise bc ; alors a divise bcv et comme a divise auc, a divise la somme $auc+bcv$, donc a divise c.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux. Soit a relatif tel que $a\equiv 0~[p]$ et $a\equiv 0~[q]$.
Alors, il existe k et k' relatifs tels que $a=kp$ et $a=k'q$ d'où $kp=k'q$.
p divise $k'q$ et p est premier avec q, donc, d'après le théorème de Gauss, p divise k'. Il existe $k''\in\mathbb{Z}$, $k'=pk''$.
Alors $a=k'q=k''pq$ d'où $a\equiv 0~[pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 9 & [17]\\ n & \equiv & 3 & [5]\end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
On désigne par $(u~;~v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u+5v=1$.

a. 17 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que $17u+5v=1$.

b. On pose $n_0=3\times 17u+9\times 5v$.
Soit $(u~;~v)$ un couple solution, donc $17u+5v=1$. On en déduit que $17u\equiv 1~[5]$ et $5v\equiv 1~[17]$.
Alors $n_0=3\times 17u+9\times 5v\equiv 9\times 5v~[17]\equiv 9\times 1~[17]\equiv 9~[17]$.
De même : $n_0=3\times 17u+9\times 5v\equiv 3\times 17u~[5]\equiv 3\times 1~[5]\equiv 3~[5]$.
Par conséquent, $n_0\in\mathscr{S}$.

c. Appliquons l'algorithme d'Euclide :
$17=3\times 5+2$ et $5=2\times 2+1$, d'où $1=5-2\times 2$
$=5-(17-5\times 3)\times 2=17\times(-2)+5\times 7$.
On peut prendre $(u~;~v)=(-2~;~7)$.
On obtient alors $n_0=213$ (ce n'est évidemment pas la seule valeur !)

2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.

a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
$n \equiv 9\ [17]$ et $n_0 \equiv 9\ [17]$ donc $n - n_0 \equiv 0\ [17]$.
De même, $n \equiv 3\ [5]$ et $n_0 \equiv 3\ [5]$ donc $n - n_0 \equiv 0\ [5]$.
17 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après la partie A, $n - n_0 \equiv 0\ [85]$ (car $5 \times 17 = 85$).

b. On en déduit que, si $n \in \mathscr{S}$, $n \equiv n_0\ [85]$ donc $n \equiv 213\ [85]$.
Or $213 = 170 + 43 = 2 \times 85 + 43 \equiv 43\ [85]$ donc $213 \equiv 43\ [85]$.
Par conséquent : $n \in \mathscr{S} \iff n \equiv 43\ [85]$ donc $n = 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n \equiv 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$, il est clair que $n \equiv 9\ [17]$ et $n \equiv 3\ [5]$.

3. Application :
Soit n le nombre de jetons. On a : $n \equiv 9\ [17]$ et $n \equiv 3\ [5]$.
D'après ce qui précède, on a : $n = 43 + 85k$.
On sait que $300 \leqslant n \leqslant 400$, donc $300 \leqslant 43 + 85k \leqslant 400$. On en déduit que $k = 4$ et que Zoé a 383 jetons.