**Durée : 4 heures**

# Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2011

**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

1. $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 0$, donc $\underbrace{u'(x)}_{y'} = a \times \underbrace{\left(-\dfrac{b}{a}\right)}_{y} + b \iff 0 = -b + b$.

   Donc $u$ est une solution de (E).

2. $f$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $f - u$ l'est aussi et quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
   $(f-u)(x) = f(x) - u(x)$, d'où
   $(f-u)'(x) = f'(x) - u'(x) = f'(x)$.
   Donc $f$ est solution de (E) si et seulement si quel que soit $x \in \mathbb{R}$ :
   $f'(x) = af(x) + b \iff f'(x) - u'(x) = af(x) - au(x) + au(x) + b \iff$
   $(f-u)'(x) = a(f(x) - u(x)) + a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b \iff (f-u)'(x) = a(f(x) - u(x)) - b + b \iff$
   $(f-u)'(x) = a(f(x) - u(x))$, c'est-à-dire que $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

3. D'après le résultat initial donné on a donc $f(x) - u(x) = K\mathrm{e}^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$, donc :
   $f(x) = K\mathrm{e}^{ax} + u(x) = K\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

**Partie B**

1. L'équation différentielle peut s'écrire : $v'(t) = 3 - \dfrac{1}{10}v(t)$.

   On reconnaît une équation différentielle résolue dans la partie A avec $a = -\dfrac{1}{10}$ et $b = 3$.
   On a donc :
   $v(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} - \dfrac{3}{-\frac{1}{10}} = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30$.
   En utilisant la condition initiale $v(0) = 0 \iff K + 30 = 0 \iff K = -30$, on obtient finalement :

$$v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$$

2. **a.** On sait que la fonction $v$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

   $v'(t) = -30\left(-\dfrac{1}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} = 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$,

   car on sait que $\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$, quel que soit le réel $t$.
   La fonction $v$ est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   **b.** On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} v(t) = 30$.

**3.** Il faut donc résoudre l'inéquation dans $[0~;~+\infty[$, $v'(t) < 0,1$, soit, d'après l'équation différentielle

$3 - \dfrac{1}{10}v(t) < 0,1 \iff 3 - \dfrac{1}{10} \times 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}\right) < 0,1 \iff 3\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}} < 0,1 \iff$

$\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}} < \frac{0,1}{3} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)

$-\dfrac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right) \iff t > -10\ln\left(\frac{1}{30}\right)$.

Comme $-10\ln\left(\frac{1}{30}\right) \approx 34,01$, la vitesse est donc stabilisée à partir de la 35$^{\text{e}}$ seconde.

**4.** On a donc $d_{35} = \displaystyle\int_0^{35} v(t)\,\mathrm{d}t$.

On a $v(t) = 30 - 30\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}$, dont une primitive sur $[0~;~+\infty[$ est :

$V(t) = 30t + 300\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}$.

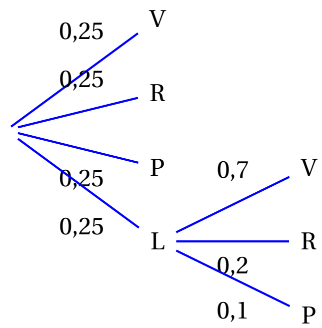
D'où : $d_{35} = [V(t)]_0^{35} = 30 \times 35 + 300\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}} - \left(30 \times 0 + 300\mathrm{e}^{-\frac{0}{10}}\right) = 1\,050 + 300\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}} - 300 = 750 + 300\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}} \approx 759,06 \approx 759,1$ (m).

*Rem.* Plus rapide : on a vu que $v(t) = 30 - 10v'(t)$, donc une primitive de $v$ est $30t - 10v(t)$, d'où un calcul de l'intégrale plus rapide.

**EXERCICE 2** **4 points**

Commun à tous les candidats

**1.**




**2.** On a $p(\text{V}) = 0,25 + 0,25 \times 0,7 = 0,25 \times 1,7 = 0,425$.

**3.** On a $p_{\text{V}}(\text{L}) = \dfrac{p(\text{V} \cap \text{L})}{p(\text{V})} = \dfrac{0,25 \times 0,7}{0,425} = \dfrac{0,175}{0,425} = \dfrac{7}{17} \approx 0,412$.

**4.** On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée 0 fois par un concurrent « non cycliste » est égale à $\binom{6}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6$.

Donc la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste »est égale à :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{3^6 - 2^6}{3^6} = \frac{665}{729} \approx 0,912.$$

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. $f(x) = x \iff x - \ln\left(x^2+1\right) = x \iff \ln\left(x^2+1\right) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff$
   $x^2 = 0 \iff x = 0$
2. $f$ somme de fonctions dérivables sur $[0~;~1]$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - 2x \times \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
   On a quel que soit $x$, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ et sur $[0\,;\,1]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc sur $[0\,;\,1]$, $f'(x) \geqslant 0$ : la fonction est donc croissante sur $[0\,;\,1]$.
   On a vu que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2 < 1$. La fonction est croissante de 0 à $1 - \ln 2 < 1$, donc toutes les images $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

**Partie B**

1. *Initialisation :* $u_0 = 1 \leqslant 1$, donc $u_0 \in [0~;~1]$.
   *Hérédité :* Supposons qu'il existe un entier $p$ tel que $u_p \in [0~;~1]$ ; d'après la partie A, on a $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$ et on a vu que si $u_p \in [0~;~1]$, alors
   $f\left(u_p\right) = u_{p+1} \in [0~;~1]$.
   On a donc pour tout naturel $n$, $u_n \in [0~;~1]$.
2. On a $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$
   Or $u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0 \iff 0 \geqslant -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
   Conclusion : quel que soit le naturel $n$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ : la suite est décroissante.
3. La suite est décroissante et tous ses termes sont minorés par 0 : elle est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à 0.
   Par continuité de la fonction dérivable $f$, on a à la limite :
   $\ell = f(\ell)$, équation dont on a vu que la seule solution est 0.
   On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\,(3~;~2~;~-2)$, $\quad\overrightarrow{\text{AC}}\,(0~;~2~;~1)$, d'où $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0 + 4 - 2 = 2$.
   On a $\text{AB}^2 = \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 9 + 4 + 4 = 17$ ; donc $\text{AB} = \sqrt{17}$ ;
   $\text{AC}^2 = \overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0 + 4 + 1 = 5$, donc $\text{AC} = \sqrt{5}$.

   **b.** On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :
   $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\widehat{\text{BAC}}$, soit :
   $2 = \sqrt{17} \times \sqrt{5} \times \cos\widehat{\text{BAC}} \iff \cos\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{2}{\sqrt{85}} \Rightarrow \widehat{\text{BAC}} \approx 77\,°$.

   **c.** L'angle $\widehat{\text{BAC}}$ n'étant ni nul, ni plat, les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. On a : $(-2~;~0~;~1)$ vérifie $2x - y + 2z + 2 = 0 \iff -4 - 0 + 2 + 2 = 0$ égalité vraie ;
   $(1~;~2~;~-1)$ vérifie $2x - y + 2z + 2 = 0 \iff 2 - 2 - 2 + 2 = 0$ égalité vraie ;
   $(-2~;~2~;~2)$ vérifie $2x - y + 2z + 2 = 0 \iff -4 - 2 + 4 + 2 = 0$ égalité vraie.
   Les coordonnées des trois points non alignés A, B et C vérifient l'équation : cette équation est donc l'une des équations du plan (ABC).

**3.** $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\,(1\,;\,1\,;\,-3)$ ; $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\,(1\,;\,-2\,;\,6)$.
$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles et distincts : ils sont donc sécants suivant une droite $\mathscr{D}$ dont les coordonnées vérifient :
$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-3z+3 & = & 0\\ x-2y+6z & = & 0\end{array}\right.$ soit en posant $z=t$ :
$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+3 & = & 3z\\ x-2y & = & -6z\\ z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y+3 & = & 3t\\ x-2y & = & -6t\\ z & = & t\end{array}\right. \iff$
(par différence des deux premières équations $\left\{\begin{array}{lcl} 3y+3 & = & 9t\\ x-2y & = & -6t\\ z & = & t\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3t-1\\ x & = & 2y-6t\\ z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3t-1\\ x & = & 6t-2-6t\\ z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2\\ y & = & -1+3t\\ z & = & t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

**4.** $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(0\,;\,3\,;\,1)$ et le plan (ABC) apour vecteur normal $\overrightarrow{v}\,(2\,;\,-1\,;\,2)$. Comme $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -3+2 = -1 \neq 0$, ces vecteurs ne sont pas orthognaux, donc la droite $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle au plan (ABC).
Le point commun est tel que $x=-2,\ y=3t-1,\ z=t$ et $2x-y+2z+2=0 \iff -4-3t+1+2t+2=0 \iff -1=t$.
Le point commun à $\mathscr{D}$ et au plan (ABC) a pour coordonnées $(-2\,;\,-4\,;\,-1)$.

**5.** **a.** $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{S} \iff \Omega M^2 = 3^2 = 9 \iff (x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2 = 9 \iff x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0$.

**b.** $M(-2\,;\,3t-1\,;\,t)\in\mathscr{S} \iff (-2)^2+(3t-1)^2+t^2-2\times(-2)+6(3t-1)-2t+2 = 0 \iff 4+9t^2+1-6t+t^2+4+18t-6-2t+2=0 \iff 10t^2+10t+5 = 0 \iff 2t^2+2t+1=0$.
On a $\Delta = 4-8=-4<0$ : il n'y a pas de solution : conclusion la droite $\mathscr{D}$ ne coupe pas la sphère.

**c.** Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$, c'est démontrer que la distance du point $\Omega$ au plan (ABC) est égal au rayon de la sphère.
Or $d(\Omega,\ (\text{ABC})) = \dfrac{|2\times 1-(-3)+2\times 1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{2+3+2+2}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3 = r$.