

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2013

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. La bonne réponse est b.
Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.
2. La bonne réponse est c.
Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{AF}(1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{BG}(0, 1, 1)$, d'où $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$.
3. La bonne réponse est d. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x + y - z = 0$.
4. La bonne réponse est b.
Un vecteur normal de \mathcal{P} est $\vec{n}(1, 1, -1)$, or $\overrightarrow{EC}(1, 1, -1)$. Par conséquent \overrightarrow{EC} est normal à \mathcal{P} , et comme \overrightarrow{EL} et \overrightarrow{EC} sont colinéaires, \overrightarrow{EL} est de ce fait aussi normal à \mathcal{P} .
5. La bonne réponse est d.
On a $\overrightarrow{EC}(1, 1, -1)$ et $E(0, 0, 1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases}$$
. Le point L a donc pour coordonnées $L(t, t, 1 - t)$, et comme $L \in \mathcal{P}$ alors : $t + t - (1 - t) = 0$ d'où l'on tire $t = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $L(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, d'où le résultat.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On a :

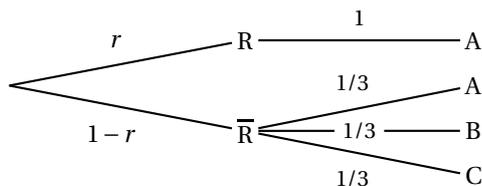
$$\begin{aligned} f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$P\left(f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]\right) = P\left(p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]\right) \geq 0,95$$

Partie B

1. a. Arbre pondéré illustrant la situation :



b. On a, d'après l'arbre précédent :

$$P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \bar{R}) = r + \frac{1}{3}(1-r) = \frac{1}{3}(3r + 1 - r) = \frac{1}{3}(1 + 2r).$$

c. On a : $P_A(R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{r}{\frac{1}{3}(1 + 2r)} = \frac{3r}{1 + 2r}.$

2. a. L'expérience consiste en une répétition de 400 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où la probabilité de « succès » (c'est-à-dire que l'étudiant ait la bonne réponse) est égale à $P(A)$. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

b. On a $n = 400$ et $f = \frac{240}{400} = 0,6$, donc $n \geq 30$, $nf \geq 5$ et $n(1 - f) \geq 5$, un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p est donc :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,55 ; 0,65].$$

Ainsi, avec une probabilité supérieure à 95 % :

$$0,55 \leq p \leq 0,65$$

or $p = \frac{1}{3}(1 + 2r)$, donc :

$$0,55 \leq \frac{1}{3}(1 + 2r) \leq 0,65$$

d'où :

$$1,65 \leq 1 + 2r \leq 1,95$$

puis :

$$0,325 \leq r \leq 0,475$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r est donc : $[0,325 ; 0,475]$.

c. i. Ici $r = 0,4$, donc $p = \frac{1}{3}(1 + 2r) = 0,6$. La loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,6$ a pour espérance $np = 240$ et pour variance $V = np(1 - p) = 96$. On peut alors l'approcher par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma = \sqrt{96}$.

ii. Par lecture de la table fournie (ou utilisation de la calculatrice) :

$$P(X \leq 250) = 0,846.$$

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par opérations $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + e^x$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc, par opérations $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- Pour tout réel x , $f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	0	$-1/e^2$	$+\infty$

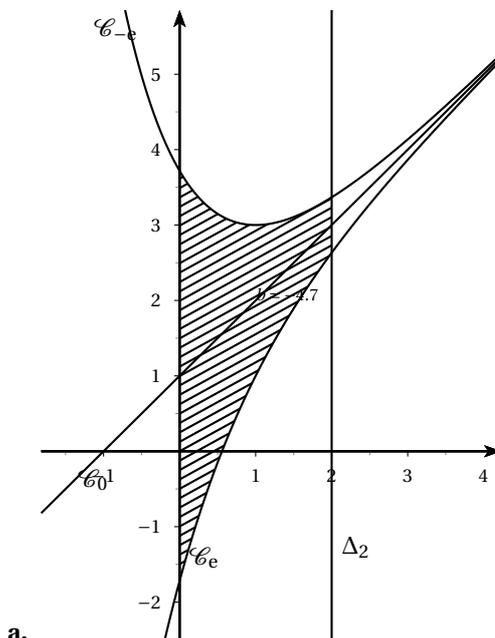
Partie B

1. a. On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x + 1 = me^x \\ &\iff (x + 1)e^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :

- si $m < -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc \mathcal{C}_m ne coupe pas l'axe des abscisses ;
 - si $m = -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc \mathcal{C}_m coupe l'axe des abscisses en un point ;
 - si $-\frac{1}{e^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc \mathcal{C}_m coupe l'axe des abscisses en deux points ;
 - si $m \geq 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc \mathcal{C}_m coupe l'axe des abscisses en deux points.
2. • La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{e^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -e$.
- La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{e^2}$ ou $m \geq 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
- Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = e$.
3. Pour tout réel x , $g_m(x) - (x + 1) = -me^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
- si $m > 0$, alors pour tout réel x , $g_m(x) - (x + 1) < 0$, donc \mathcal{C}_m est en dessous de \mathcal{D} ;
 - si $m < 0$, alors pour tout réel x , $g_m(x) - (x + 1) > 0$, donc \mathcal{C}_m est au dessus de \mathcal{D} ;
 - si $m = 0$, alors pour tout réel x , $g_m(x) - (x + 1) = 0$, donc \mathcal{C}_m et \mathcal{D} sont confondues.
4. Le domaine D_2 hachuré :



b. Pour tout $a \geq 0$, la courbe \mathcal{C}_{-e} est au dessus de \mathcal{C}_e , par conséquent l'aire $\mathcal{A}(a)$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(a) &= \int_0^a f_{-e}(x) - f_e(x) dx \\
 &= \int_0^a ((x+1) + ee^{-x}) - ((x+1) - ee^{-x}) dx \\
 &= \int_0^a 2ee^{-x} dx \\
 &= 2e[-e^{-x}]_0^a \\
 &= 2e(-e^{-a} + 1) \\
 &= 2e - 2e^{1-a}.
 \end{aligned}$$

On a de plus $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = 2e$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{2}{3}$.

2. a. Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

k	w	u	v
1	0	0,5	0,667
2	1/2	0,583	0,917

(valeurs approchées à 10^{-3} près)

b. Plus généralement, pour un entier N saisi par l'utilisateur, l'algorithme affichera u_N et v_N .

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors : $AX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_n + v_n}{2} \\ \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

- Pour $n = 0$, on a $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$ (ou I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2), donc la propriété est vraie pour $n = 0$
- Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel n : $X_n = A^n X_0$, alors : $AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$, c'est-à-dire $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$ et la propriété est donc héréditaire.
- Donc, pour tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0$.

4. a. On a :

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

en d'autres termes la matrice P est inversible et son inverse est P' .

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P' B^n P$.

- $A^0 = I_2$, or $P' B^0 P = P' I_2 P = P' P = I_2$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Supposons que, pour un certain entier naturel n , $A^n = P' B^n P$, alors

$$A^{n+1} = AA^n = P' B P P' B^n P = P' B I_2 B^n P = P' B B^n P = P' B^{n+1} P$$

et la propriété est donc héréditaire.

- En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = P' B^n P$.

b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} (\frac{1}{6})^n \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n \\ \frac{2}{5} - \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n & \frac{3}{5} + \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}.$$

5. a. En multipliant la matrice A^n précédente à droite par le vecteur colonne $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on obtient $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n \\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$. D'où l'on tire $u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n$ et $v_n = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^n$.

- b. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{6} < 1$), on obtient par opérations que les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers $\frac{3}{5}$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

2. $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$. On a alors $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

3. a. Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,8047	0,3333
2	0,5586	0,1111

b. Plus généralement, pour une valeur de N saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de a_N .

Partie B

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$ et $z_{n+1} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$, donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) converge vers 0.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \left| \frac{z_n + |z_n|}{3} \right| = \frac{1}{3} |z_n + |z_n|| \leq \frac{1}{3} (|z_n| + |z_n|)$, c'est-à-dire :
 $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

- On a $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- Supposons que, pour un certain entier naturel n , $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$, alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3} u_n \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2},$$

la propriété est donc héréditaire.

- En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n| \geq 0$, donc : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. Comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$, le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 0.

c. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_n| \leq u_n$. Comme (u_n) converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que $(|a_n|)$ converge vers 0, donc que (a_n) converge vers 0.