

FONCTIONS SINUS ET COSINUS

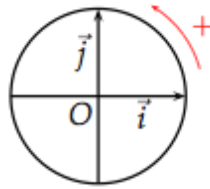
Voici le chapitre sur les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Il ne devrait être, normalement, qu'un rappel car vous les avez déjà longuement étudié en seconde puis en première. Cependant, il est primordial de connaître ces fonctions sinus et cosinus pour réussir son épreuve du bac de juin prochain. C'est la raison pour laquelle, dans ce chapitre, nous allons revoir la notion de fonctions trigonométriques pour ensuite attaquer purement et simplement les études des fonctions sinus et cosinus.

I - FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

A défaut de me répéter chaque année, les **fonction trigonométriques** sont TRÈS IMPORTANTES en mathématiques. Nous allons dans un premier temps revoir quelques notions sur ces fonctions avant d'attaquer les études.

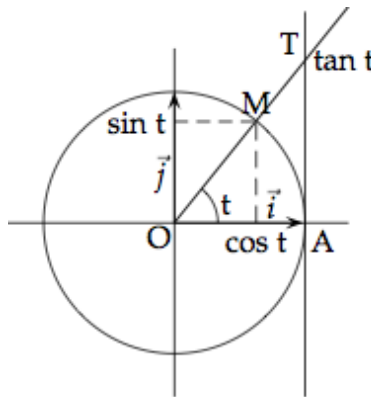
Définition : Soit un repère orthonormal $(O; I; J)$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le **sens positif** (ou **sens direct**).



Remarque : Attention, le sens positif est le sens contraire au aiguilles d'une montre. C'est souvent la source d'erreurs. Ne me demandez pas pourquoi, c'est une convention mathématiques.

Définitions : Soit un repère orthonormal $(O; I; J)$.

On appelle **cosinus de x** , noté $\cos x$, l'abscisse du point M appartenant au cercle trigonométrique, et **sinus de x** , noté $\sin x$, l'ordonnée de ce point M .



Mais ce ne sont pas des fonctions si elles sont sur un cercle ? Je n'ai pas compris.

Si, ce sont des fonctions que l'on représente sur un cercle. Je vous les présente dans un "vrai" repère tout de suite, dans les études de ces fonctions.

II - FONCTION SINUS

On commence par la fonction sinus avec d'abord une définition.

Définitions : La **fonction sinus** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sin x$$

Jusque là, rien de très spécial.

Nous allons voir les différentes propriétés sur la fonction sinus, ça c'est déjà plus intéressant, non ?

Propriétés :

– La fonction sinus est dérivable et continue sur \mathbb{R} .

– La fonction sinus est une fonction impaire :

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

– La fonction sinus est périodique de période 2π .

– Elle est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

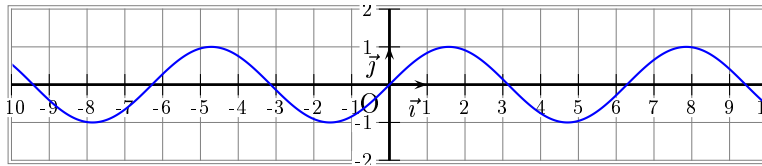
– La fonction sinus est comprise entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

– **Propriété fondamentale des fonctions trigonométriques :**

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Voici sa courbe représentative :



Remarque : La courbe représentative de la fonction sinus est une **sinusoïde**.

III - FONCTION COSINUS

Au tour de sa cousine, la fonction cosinus que l'on aborde par une définition.

Définitions : La **fonction cosinus** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos x$$

Après cette définition, voyons les propriétés de la fonction cosinus.

Propriétés :

– La fonction cosinus est dérivable et continue sur \mathbb{R} .

– La fonction cosinus est une fonction paire :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

– La fonction cosinus est aussi périodique de période 2π .

– Elle est croissante sur $[-\pi; 0]$ et décroissante sur $[0; \pi]$.

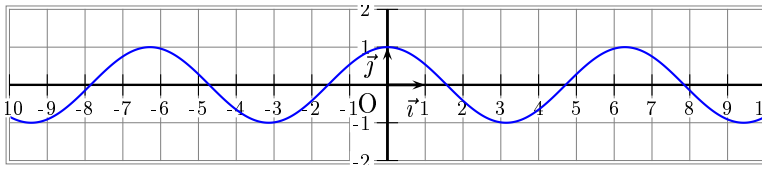
– La fonction cosinus est comprise entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

– **Propriété fondamentale des fonctions trigonométriques** (je me répète exprès) :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Voici la courbe représentative de la fonction cosinus :



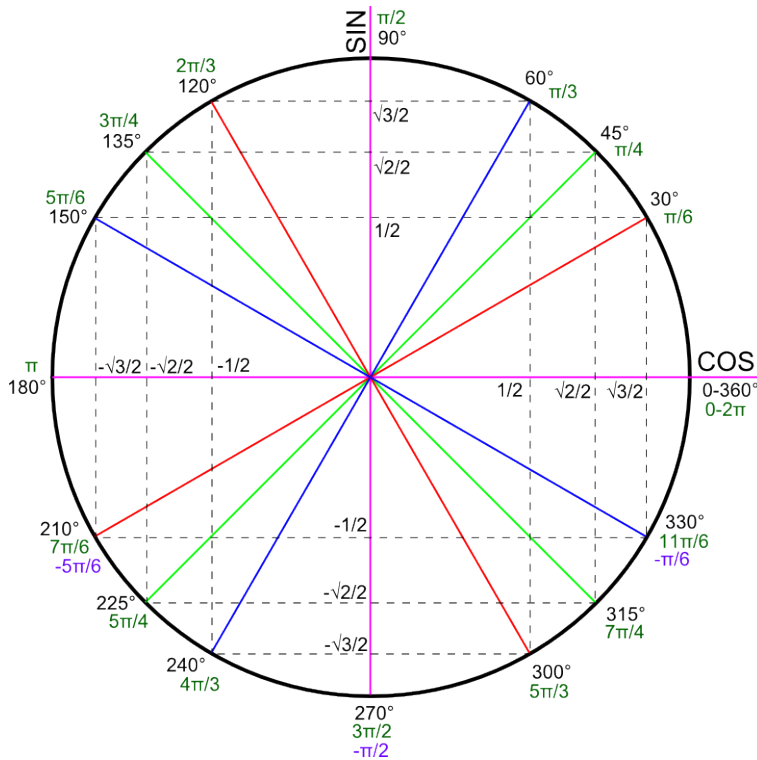
Remarque : La courbe représentative de la fonction cosinus est également une **sinusoïde**.

IV - FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

Je vous rappelle aussi les valeurs des fonctions trigonométriques à connaître **par cœur** pour le baccalauréat.

| | | | | | | | | | |
|---------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| Degrés | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
| Radians | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| Sinus | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| Cosinus | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |

Et voici le cercle que vous connaissez bien maintenant.



Et comment je fais pour les autres angles ?

Vous vous servirez des propriétés de parités ou autres pour les déterminer. Ou utilisez la remarque suivante.

Remarque importante : Pour donner la valeur principale d'un angle, on décomposera sous la forme $\theta + 2k\pi$, avec θ appelée mesure principale de l'angle.

Si vous avez du mal avec les formules ou les équations trigonométriques, n'hésitez pas à faire un tour dans le chapitre de l'année dernière.

Voici la totalité des formules à connaître.

En commençant par celles que l'on retrouve facilement avec le cercle trigonométrique.

Propriétés : Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos(\pi + x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) &= -\sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x)\end{aligned}$$

Pour les retrouver, prenez un petit angle.

Par exemple, un angle de $\frac{\pi}{6}$.

Rajoutez-lui 90° , soit un angle de $\frac{\pi}{2}$. Vous verrez que le cosinus deviendra le sinus négatif de l'angle de départ et que le sinus deviendra le cosinus de l'angle de départ.

Et les autres...

Formules d'addition : Pour tout réels a et b ,

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

Formules de duplication : Pour tout réel a ,

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}\end{aligned}$$

Ces formules sont tirés des précédentes bien évidemment.

Voilà, je pense qu'il y en a assez pour cette année.

Tâchez de bien les apprendre toutes, vous tomberez sur l'une d'entre elles dans un exercice du Bac, c'est certain.