Equations différentielles - Correction

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = 0$

   On a :

   $$y' + 3y = 0 \Longleftrightarrow y' = 3y$$

   L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

   $$f(x) = \lambda e^{-3x}$$

2. $2y' - 5y = 4$

   On a :

   $$2y' - 5y = 4 \Longleftrightarrow y' = \frac{5}{2}y + 2$$

   L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

   $$f(x) = \lambda e^{\frac{5}{2}x} - \frac{4}{5}$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y + 3$ avec la condition initiale $y(1) = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$f(x) = \lambda e^{2x} - \frac{3}{2}$$

Or, la condition initiale est $y(1) = \frac{1}{2}$, donc :

$$f(1) = \lambda e^2 - \frac{3}{2} = 5 \Longleftrightarrow \lambda e^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2}{e^2}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{2}{e^2}e^{2x} - \frac{3}{2}$$

Exercice 3

Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' + 3y = 4x + 1$$

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est une solution de (E), alors la fonction f' est solution de l'équation différentielle (E_1) suivante :

   $$y' + 3y = 4$$

   Soit f une solution de l'équation différentielle (E).
   Pour tout réel x, on a :

   $$y' = -3y + 4x + 1$$

   Autrement dit, avec la fonction f :

   $$f'(x) = -3f(x) + 4x - 1$$

De plus, les fonctions $x \mapsto -3f(x)$ et $x \mapsto 4x+1$ sont toutes les deux dérivables sur l'ensemble des réels, donc la fonction f' l'est aussi et on a :

$$f''(x + 3f'(x) = 4$$

La fonction f' est donc solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1) et en déduire que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{4}{3}x = \frac{1}{9} + Ce^{-3x}$$

où C est une constante réelle.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ae^{-3x} + \frac{4}{3}$$

où A est une constante réelle.

On sait que f est une solution de (E) et f' une solution de (E_1) d'après la question précédente.
Donc, il existe un réel A tel que la dérivée de f, solution de (E_1), vaut :

$$f'(x) = Ae^{-3x} + \frac{4}{3}$$

En prenant la primitive, on obtient :

$$f(x) = -\frac{A}{3}e^{-3x} + \frac{4}{3} + K$$

où K est un réel.
Or, f est solution de (E).
Donc :

$$f'(x) + 3f(x) = 4x + 1 \iff Ae^{-3x} + \frac{4}{3} + 3[-\frac{A}{3}e^{-3x} + \frac{4}{3} + K] = 4x + 1 \iff \frac{4}{3} + 3K = 1 \iff K = -\frac{1}{9}$$

En posant :

$$C = -\frac{1}{3}$$

On obtient le résultat voulu :

$$f(x) = \frac{4}{3}x = \frac{1}{9} + Ce^{-3x}$$

3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Question simple.

$$f(0) = 1 \iff C - \frac{1}{9} = 1 \iff C = \frac{10}{9}$$

On a donc :

$$f(x) = \frac{4}{3}x = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}e^{-3x}$$

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' + 4y = 3e^{-5x}$$

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda e^{-5x}$ soit solution de (E).

La fonction g est solution de (E) si, et seulement si, elle vérifie l'équation (E), tout simplement : $g'(x)+4g(x) = 3e^{-5x}$.
Or,

$$g'(x) + 4g(x) = -5\lambda e^{-5x} + 4\lambda e^{-5x} = -\lambda e^{-5x} = 3e^{-5x} \iff \lambda = -3$$

2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E') :

$$y' + 4y = 0$$

Cette question est souvent posée dans ce type d'exercice.
Regardez-bien la méthode à suivre. La fonction f est solution de (E) si, et seulement si :

$$f'(x) + 4f(x) = g'(x) + 4g(x)$$

$$\iff f'(x) - g'(x) + 4f(x) - 4g(x) = 0$$

$$\iff (f-g)'(x) + 4(f-g)(x) = 0$$

Soit : si, et seulement si, la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E'):y'+4y=0.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').

Résolvons maintenant cette équation différentielle très simpliste.

$$y' + 4y = 0 \iff y' = -4y$$

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-4x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Grâce aux question précédentes, nous allons pouvoir déterminer les solutions de l'équation (E) de départ.
La fonction f est solution de (E) si, et seulement si,la fonction $f-g$ est solution de (E') rappelles-vous.
C'est-à-dire si :

$$f(x) - g(x) = Ce^{-4x} \iff f(x) = -3e^{5x} + Ce^{-4x}$$

Conclusion : Les solutions sur l'ensemble des réels de l'équation différentielle (E) sont les fonctions : $(C \in \mathbb{R})$

$$x \mapsto -3e^{5x} + Ce^{-4x}$$

Exercice 5

Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + 5y' = 0$$

1. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction f' est solution de l'équation différentielle (E_1) :

$$y' + 5y = 0$$

Posons $F = f'$.
La fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si :

$$f''(x) + 5f(x) = 0 \iff F'(x) + 5F(x) = 0$$

C'est-à-dire si, et seulement si, la fonction F est solution de (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

L'équation différentielle (E) est une équation différentielle sans second membre. Ses solutions sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-5x}$ avec C toujours un réel.
D'après la question précédente, les solutions de (E) sont les primitives des fonctions solutions de (E_1). Il faut donc prendre la primitive.
Si C est un réel quelconque, alors $A = -\frac{C}{5}$ est aussi un réel quelconque.

Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto -5Ae^{-5x}$.
Et les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc toutes les fonctions de la forme : $(A, B \in \mathbb{R})$

$$x \mapsto Ae^{-5x} + B$$

3. Pour tout réel x, on pose $g(x) = a\cos x + b\sin x$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
   Déterminer les réels a et b tels que g vérifie l'équation différentielle (E') :

$$y'' + 5y = 26\cos x$$

On a posé, pour tout réel x : $g(x) = a\cos x + b\sin x$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
Calculons les dérivées première et seconde, nous allons en avoir besoin pour retrouver la forme de l'équation différentielle (E') :

$$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$$

$$g''(x) = -a\cos x - b\sin x$$

On remplace dans l'équation différentielle (E') et le tour est joué.

$$g''(x) + 5g'(x) = 26\cos x \iff (5b - a)\cos x - (b + 5a)\sin x = 26\cos x$$

Résolvons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 5b - a &= 26 \\ b + 5a &= 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} a &= -1 \\ b &= 5 \end{cases}$$

Donc :

$$g(x) = -\cos x + 5\sin x$$

4. Montrer que f est solution de (E') si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E).

Cette question est souvent posée dans ce type d'exercice.
Regardez-bien la méthode à suivre. La fonction f est solution de (E') si, et seulement si :

$$f''(x) + 5f'(x) = g''(x) + 5g'(x)$$

$$\iff f''(x) - g''(x) + 5f'(x) + 5g'(x) = 0$$

$$\iff (f - g)''(x) + 5(f - g)'(x) = 0$$

Soit : si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E').

Grâce aux question précédentes, nous allons pouvoir déterminer les solutions de l'équation (E').
La fonction f est solution de (E') si, et seulement si,la fonction $f - g$ est solution de (E) rappelles-vous.
C'est-à-dire si :

$$f(x) - g(x) = Ae^{-5x} + B$$

où A et B sont deux constantes réelles.
Conclusion : Les solutions sur l'ensemble des réels de l'équation différentielle (E') sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ae^{-5x} + B - \cos x + 5\sin x$$

6. Déterminer la solution de (E') vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

   Une condition initiale pour finir.
   On a :

$$f(x) = Ae^{-5x} + B - \cos x + 5\sin x$$

$$f(x) = -5Ae^{-5x} + \sin x + 5\cos x$$

   On résout le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A + B - 1 & = & 0 \\ 5 - 5A & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 0 \end{array} \right.$$

   Conclusion : la solution de (E') vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-5x} - \cos x + 5\sin x$$